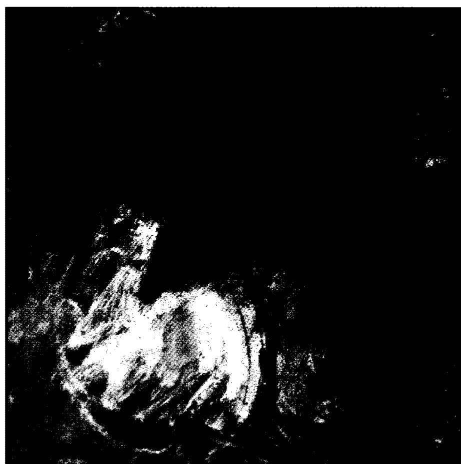
c e n t e

INTRODUCERE ÎN LOGICA SIMBOLICĂ

TEODOR STIHI



ALL

INTRODUCERE ÎN LOGICA SIMBOLICĂ

TEODOR STIHI

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale
STIHI, TEODOR
Introducere în logica simbolică / Teodor Stihi - București: Editura BIC ALL, 1999
104 p.; 20 cm (ACCENTE)
Bibliogr.
Index
ISBN 973-571-286-5

16

Editura **BIC ALL** — București, Bd. Timișoara nr. 58, sector 6, cod 76548
☎ 402 26 00
Fax: 402 26 10

Departamentul difuzare — ☎ 402 26 20
Fax: 402 26 30

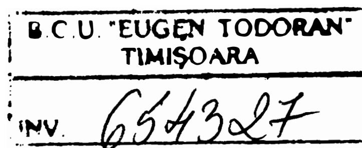
Redactor: Radu Slobodeanu
Coperta: Dominic Cernea

PRINTED IN ROMANIA

Colecția **Accente**
apare sub îngrijirea
Prof. Univ. Dr. **Paul Flondor**

TEODOR STIHI

INTRODUCERE ÎN LOGICA SIMBOLICĂ





1999
ALL

În această colecție au apărut:

Cum ne țesem eul - argument, selecție și traducere
G.G. Constandache
Algoritmi genetici - ediție îngrijită de
Paul Flondor și Cezar Ionescu

Urmează să apară:

Genetică și patologie - Marina Anton și
Minerva Muraru
Mulțimi, funcții recursive, aplicații - Ionel Țevy
Conștiința și identitatea umană - ediție îngrijită de
G.G. Constandache

CĂTRE CITITOR

Limbajul logico-simbolic a devenit, prin introducerea în manualele de liceu, element de cultură generală. Ceea ce este firesc, ţinând seama de faptul că în această haină, croită după moda sfârşitului mileniului nostru, s-a îmbrăcat şi o bună parte din tradiţionala logică aristotelică, la cei peste 2200 de ani de existenţă.

Dându-şi mâna, două dintre artele liberale ale învăţământului medieval - logica şi matematica - au produs, în ultimul secol şi jumătate, ceea ce gânditori şi mari creatori de talia lui G.W. Leibniz au imaginat fără a putea realiza: un „calculus ratiocinator” (calcul argumentator).

În paginile următoare vom încerca să prezentăm, chiar pentru cititorul cu un nivel minim de cunoştinţe matematice, elementele de bază ale calculului logic. Ce i se cer acestui cititor sunt mai puţin aceste cunoştinţe, cât răbdarea şi perseverenţa de a urmări definiţiile, proprietăţile şi mai ales exemplele cu care le-am ilustrat. Cei doritori de amănunte şi justificări complete (demonstraţii) pot consulta, desigur cu folos, una dintre excelentele expuneri detaliate pe această temă (câteva sunt menţionate într-o scurtă bibliografie la pag. 100)

În plus, pentru a-i oferi aceluiaşi cititor conştiincios prilejul şi satisfacţia de a-şi vedea puse în lucru cunoştinţele dobândite prin efortul acestei lecturi, am adăugat, în finalul fiecăreia dintre cele două părţi din care este alcătuită cartea, câteva exerciţii având rezolvarea în anexa I.

Nutrim speranţa că prin această poartă deschisă spre un domeniu tradiţional şi, în acelaşi timp, actual, vor pătrunde cât mai mulţi. Şi mai sperăm că această experienţă îi va ajuta să-şi dezvolte rigoarea în gândire şi în exprimare. Le urăm tuturor succes şi aşteptăm cu interes reacţiile şi sugestiile cititorilor noştri.

Autorul

CUPRINS

I. CALCULUL PROPOZIŢIONAL

A. Idei introductive

§1. Calcul logic

Ideea unui calcul logic a apărut în lucrările lui R. Lullus (1235-1315) şi G.W. Leibniz (1646-1716). Dar pasul decisiv a fost făcut de G. Boole (1815-1864) care pune bazele unui calcul logic asemănător celui algebric. Calculul boolean – numit astfel în onoarea sa – a fost apoi dezvoltat prin lucrările unor logicieni şi matematicieni remarcabili; astăzi calculul logic este un instrument de lucru atât în ştiinţele exacte, cât şi în unele discipline umaniste. Principiile sale generale sunt studiate într-o serie de şcoli şi facultăţi: de la cele de matematică şi calculatoare la cele de psihologie şi filozofie.

Vom prezenta în paginile următoare aceste principii împărţind expunerea în două secvenţe:

– calculul propoziţiilor, sau propoziţional, şi
– calculul predicatelor.

§2. Propoziţii logice[1]

Acestea sunt elementele constitutive ale calculului propoziţional.

1A. *Definiţie. O propoziţie logică* este o propoziţie sau frază gramaticală având un conţinut enunţiativ ce poate fi caracterizat – într-un context dat – drept adevărat sau fals (nu dintr-o dată).

---

[1] Atributul „logic" este utilizat în această lucrare într-un sens mai restrâns decât în vorbirea curentă.

Exemple. Plouă.

E soare.

E soare, deci nu plouă.

O interogaţie (Îmi poate folosi logica la ceva?), o exclamaţie (Gândeşte-te!) etc. nu pot fi caracterizate – în nici un context – drept adevărate sau false. Prin urmare, nu sunt propoziţii logice.

Precizăm că nu ne vor interesa condiţiile – obiective sau subiective – de care depind adevărul sau falsitatea propoziţiilor logice. Trebuie doar ca fiecare dintre aceste propoziţii să fie sau A (adevărată) sau F (falsă).

A şi F se vor numi *valori de adevăr.*

§3. Operatori logici

Calculul logic utilizează noţiuni şi simboluri de sorginte matematică.

Majusculele P, Q, R etc. eventual indexate, vor reprezenta propoziţii logice. Dar simbolizând prin P, Q, R cele trei propoziţii logice, date mai sus drept exemple, facem un pas neadecvat către instituirea unui calcul logic. Aceasta deoarece pierdem astfel din vedere faptul că ultima dintre cele trei (E soare, deci nu plouă) se poate obţine din primele două prin anumite transformări.

Cea mai simplă dintre transformări este

Negaţia logică[1]. Propoziţia P (Plouă) se transformă prin negaţie în $\neg P$ (Nu plouă). $\neg$ este simbolul operatorului logic de negaţie.

Conjuncţia logică transformă propoziţiile P (Plouă) şi Q (E soare) în propoziţia logică

$P \wedge Q$ (Plouă *şi* e soare).

[1] În limbaj matematic o astfel de transformare se numeşte *operator*, aici fiind vorba de un operator *logic*; în speţă operatorul logic de negaţie.

$\wedge$ este simbolul acestui operator logic.

Disjuncţia logică transformă aceleaşi propoziţii P şi Q în

$P \vee Q$ (Plouă *sau* e soare),

având $\vee$ ca simbol al său.

Implicaţia logică transformă P şi Q în

$P \Rightarrow Q$ (*P implică Q*)

şi are ca simbol $\Rightarrow$.

Echivalenţa logică transformă P şi Q în

$P \Leftrightarrow Q$ (*P echivalent Q*)

având ca simbol $\Leftrightarrow$.

Să revenim acum la ultimul dintre cele trei exemple anterioare:

E soare, *deci* nu plouă.

Asimilând pe „deci" cu „implică" o vom simboliza, conform celor explicate, prin

$$Q \Rightarrow \rceil P.$$

§4. Limbaj natural şi limbaj logic

Limbajul logicii simbolice este un fragment al celui natural (limba scrisă şi vorbită). Prin introducerea sa logicienii au urmărit eliminarea unor imprecizii şi echivocuri ale acestuia din urmă. Desigur că prin aceasta limbajul logicii simbolice pierde expresivitatea şi nuanţările specifice limbajului natural. El se apropie, de fapt, de limbajul calculatoarelor (pentru care a servit iniţial drept model).

Este important de remarcat, cu toate acestea, că într-un asemenea limbaj dispunem de suficiente mijloace de expresie pentru a reda adevărurile formulate în ştiinţele exacte, cu deosebire a celor din matematică.

Dar în cele ce urmează am ales drept exemple două extrase din literatura clasică: Eminescu şi Caragiale.

2A. *Iar în lumea cea comună a visa e un pericul,*
Căci de ai cumva iluzii, eşti pierdut şi eşti ridicul

M. Eminescu *Scrisoarea a II-a*

Pentru a transcrie în limbaj simbolic aceste două versuri eminesciene vom utiliza următoarele notații („dicționar")

P: *de ai cumva iluzii, eşti pierdut şi eşti ridicul*;
Q: *Iar în lumea cea comună a visa e un pericul.*

Fragmentul ales constituie propoziția logică

Q căci P

transcrisă drept implicația

$$P \Rightarrow Q.$$

Dar, în timp ce Q este o propoziție *simplă*[1], P se poate scrie ca rezultat al transformării unor propoziții logice; adică este *compusă.*

Continuăm „dicționarul" notând cu

R: *ai cumva iluzii*;
S: *eşti pierdut şi eşti ridicul.*

Astfel, P va putea fi redată în limbajul logicii simbolice prin

$$R \Rightarrow S.$$

Analizând la fel ca mai sus cele două componente ale implicației, constatăm că prima este simplă în timp ce a doua se descompune în

S_1: *eşti pierdut*;
S_2: *eşti ridicul.*

Anume, S va fi redată simbolic sub forma:

$$S_1 \wedge S_2$$

---

[1] Numim *simplă* o propoziție logică ce nu poate fi obținută transformând alte propoziții logice prin intermediul unor operatori logici.

Refăcând din aceste „piese" întregul fragment obținem:

$$(R \Rightarrow (S_1 \wedge S_2)) \Rightarrow Q.$$

Parantezele au acelaşi rol ca şi în algebră: indică ordinea aplicării operațiilor (aici: a operatorilor logici).

3A. ... *eu am, n-am înfăţişare, la douăsprece trecute fix mă duc la tribunal*!

I.L. Caragiale *O scrisoare pierdută* (Actul I, scena a VI-a)

Textul fiind eliptic, reconstrucția sa logică presupune şi o anumită interpretare[1]. O vom face astfel:

(*Dacă*) *eu am (sau) n-am înfăţişare, (atunci) la douăsprece trecute fix mă duc la tribunal!*

Propozițiile logice simple sunt

P: *eu am (înfăţişare)*;

Q: *la douăsprece trecute fix mă duc la tribunal*,

iar fragmentul capătă, în interpretarea dată, forma logică:

$$(P \vee \neg P) \Rightarrow Q$$

§5. Funcții de adevăr

Scopul principal pentru care a fost creat limbajul logic este acela de a servi ca „vehicul al adevărului" de la premisele la concluzia oricărui raționament exprimat cu mijloacele lui.

Legile logicii stabilesc condițiile în care, din adevărul anumitor propoziții decurge adevărul altei propoziții. Controlul asupra acestui „transfer" de adevăr este menținut impunând operatorilor logici o condiție destul de severă: aceea de a fi funcții de adevăr.

În matematică *funcția* este o corespondență între elementele unei mulțimi şi elementele altei (sau aceleiaşi) mulțimi. O

[1] Precizia limbajului logic impune asemenea interpretări, chiar dacă uneori ele pot fi forțate.

funcţie asociază fiecărui element al primei mulţimi câte un singur element din a doua mulţime.

NEGAŢIA logică defineşte o astfel de funcţie. Când propoziţia „plouă" este adevărată (A), propoziţia „nu plouă" este falsă (F). Iar când „plouă" este falsă (F), „nu plouă" este adevărată (A).

Exprimarea sintetică a acestei corespondenţe între mulţimea valorilor de adevăr {A, F} şi ea însăşi este tabela:

P	⌉*P*
A	F
F	A

TAB ⌉

Prin ea se defineşte funcţia de adevăr a negaţiei logice. Nu a negaţiei propoziţiei *P*, ci a negaţiei oricărei propoziţii logice.

CONJUNCŢIA logică defineşte la rândul său o anumită funcţie de adevăr. Deoarece conjuncţia – ca operator – transformă o *pereche* de propoziţii (*P, Q*) într-o propoziţie $P \wedge Q$, funcţia de adevăr corespunzătoare conjuncţiei va transforma fiecare dintre cele patru perechi de valori de adevăr

(A, A), (A, F), (F, A), (F, F)

într-o valoare de adevăr.

Tabela de adevăr a conjuncţiei este următoarea:

P	*Q*	$P \wedge Q$
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	F

TAB $\wedge$

Ceea ce ne arată că propoziția „*P* şi *Q*" este adevărată într-un singur caz: când cele două propoziții *P* şi *Q* sunt simultan adevărate.

DISJUNCȚIA logică defineşte funcția de adevăr redată în tabela

P	Q	$P \vee Q$
A	A	A
A	F	A
F	A	A
F	F	F

TAB $\vee$

Propoziția „*P* sau *Q*" este adevărată în toate cazurile cu excepția celui în care cele două propoziții *P* şi *Q* sunt false.

Observație. Această funcție de adevăr corespunde unui „sau" neexclusiv. În limba română apare şi un „sau" exclusiv (ca în expresia: totul *sau* nimic).

Despre funcții de adevăr vom discuta şi în continuare.

§6. Implicația şi echivalența logică

Între două propoziții logice *P* şi *Q* pot exista două tipuri de relații logice importante: implicația şi echivalența.

IMPLICAȚIA logică $P \Rightarrow Q$ este exprimată în limbajul curent prin expresii ca: dacă *P*, atunci *Q*; *Q* dacă *P*; *Q* deoarece *P*; *P* numai dacă *Q*.

În matematică sunt utilizate şi sintagmele: *P* este o condiție suficientă pentru *Q*, *Q* este o condiție necesară pentru *P*.

În logică este preferată exprimarea: *P* implică *Q*.

ECHIVALENŢA logică $P \Leftrightarrow Q$ se exprimă prin: P dacă şi numai dacă Q, P exact atunci când Q etc., iar în matematică şi prin sintagma: P este condiţia necesară şi suficientă pentru Q.

În logică apare mai frecvent exprimarea: P este echivalentă cu Q.

Fiind operatori logici, atât implicaţia cât şi echivalenţa sunt asociate unor funcţii de adevăr.

Pentru echivalenţă această funcţie este definită prin tabela:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	A

TAB $\Leftrightarrow$

Aşadar $P \Leftrightarrow Q$ este adevărată exact atunci când P şi Q au *aceeaşi* valoare de adevăr.

Pentru a înţelege cum s-a ajuns la tabela de adevăr a implicaţiei vom discuta în prealabil un exemplu de implicaţie logică.

Dacă am de lucru, (atunci) vin târziu acasă.

Descifrăm semnificaţia logică a acestei propoziţii analizând cele patru variante posibile.

1) am de lucru şi vin târziu acasă;

2) am de lucru şi nu vin târziu acasă;

3) nu am de lucru şi vin târziu acasă;

4) nu am de lucru şi nu vin târziu acasă.

În mod clar propoziţia considerată este adevărată în primul caz şi falsă în al doilea caz.

Mai puţin clare sunt valorile sale de adevăr în ultimele două cazuri. Întrucât există patru variante de alegere a lor, vom analiza fiecare variantă în parte.

P	*Q*	Varianta a	Varianta b	Varianta c	Varianta d
A	A	A	A	A	A
A	F	F	F	F	F
F	A	F	A	F	A
F	F	F	F	A	A

Linia întreruptă desparte situațiile clare de cele problematice.

În varianta a, semnificația logică a propoziției date ar coincide cu semnificația propoziției:

Am de lucru și vin târziu acasă.

(A se compara valorile de adevăr din varianta a cu TAB $\wedge$)

În varianta b această semnificație ar coincide cu cea a propoziției:

Vin târziu acasă.

(A se compara valorile de adevăr din coloanele a doua și a patra).

În varianta c semnificația logică ar fi aceeași cu a propoziției:

Am de lucru dacă și numai dacă vin târziu acasă.

(A se compara varianta c cu TAB $\Leftrightarrow$)

Toate aceste soluții sunt greu de acceptat. Ne oprim așadar la varianta d, iar funcția de adevăr a implicației logice este fixată prin tabela

P	*Q*	$P \Rightarrow Q$
A	A	A
A	F	F
F	A	A
F	F	A

TAB $\Rightarrow$

4A. *Observație.* În legătură cu relația $P \Rightarrow Q$ precizăm că propoziția P se numește *antecedent* sau *premisă* a implicației, iar propoziția Q se numește *consecvent* sau *concluzie* a sa.

Așadar relația de implicație este falsă numai în cazul în care antecedentul (premisa) este A și consecventul (concluzia) este F.

Implicaţia $Q \Rightarrow P$ se numeşte *conversa* implicaţiei $P \Rightarrow Q$.
Implicaţia $\rceil Q \Rightarrow \rceil P$ se numeşte *transpusa* implicaţiei $P \Rightarrow Q$.

B. Dezvoltarea calculului propoziţional

§7. Formule propoziţionale

Revenim la limbajul simbolic al logicii. El conţine multe elemente specifice limbajului matematic. Printre acestea pe cea de variabilă; aici de variabilă propoziţională.

1B. *Definiţie. Variabila propoziţională* este un simbol ce poate fi înlocuit cu orice propoziţie logică (adevărată sau falsă).

Notăm cu p, q, r, p_1 etc. aceste variabile.
Dacă în propoziţia logică

$$(R \Rightarrow (S_1 \wedge S_2)) \Rightarrow Q$$

ce exprimă în limbaj logic cele două versuri eminesciene (cf. 2A), înlocuim propoziţiile R, S_1, S_2, Q prin variabilele propoziţionale r, s_1, s_2, q obţinem:

$$(r \Rightarrow (s_1 \wedge s_2)) \Rightarrow q$$

Aceasta nu reprezintă propoziţia logică de mai sus, ci structura ei logică. Şi nu numai pe a ei, ci şi a altora având aceeaşi „formă” cu ea. De aceea se va numi *formulă propoziţională*.

2B. Pentru a obţine formula propoziţională ce reprezintă structura unei propoziţii logice, fiecare dintre propoziţiile simple ce apar în ea trebuie înlocuită *peste tot* unde apare prin câte o variabilă propoziţională *distinctă* de cele asociate celorlalte propoziţii simple.

Spre exemplu, structura propoziției logice:

$$(P \vee \rceil P) \Rightarrow Q$$

prin care am transcris celebra frază a lui Farfuridi din „Scrisoarea pierdută" (cf. 3A) se obține înlocuind P cu p în *fiecare* dintre cele două apariții ale sale şi Q cu q. Ea va fi exprimată prin formula:

$$(p \vee \rceil p) \Rightarrow q.$$

3B. *Construirea pas cu pas a formulelor.* Calculul logic operează cu formule logice la fel cum cel algebric operează cu formule algebrice. De aceea formulele (propoziționale) trebuie definite independent de propozițiile logice a căror structură o exprimă. Este ceea ce vom face în continuare plecând de la cele mai simple şi trecând, pas cu pas, spre cele mai complexe.

Metoda aceasta se numeşte *inductivă* şi se rezumă la două reguli.

R1. *Baza inducției.* Orice variabilă propozițională este o formulă propozițională.

R2. *Pasul inducției.* Dacă α şi β sunt formule propoziționale[1] atunci

$$\rceil \alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \Rightarrow \beta, \alpha \Leftrightarrow \beta$$

sunt formule propoziționale.

Ilustrăm această metodă prin

Exemple. Variabilele propoziționale q, r_1, r_2, s sunt formule propoziționale (R1). Din aceste formule obținem (cf. R2) formulele:

$$\rceil q \qquad\qquad r_1 \wedge r_2;$$

Aplicând din nou R2 construim formulele:

$$q \vee \rceil q \qquad\qquad q \Rightarrow (r_1 \wedge r_2);$$

[1] Notăm α, β, γ etc. formulele construite cu ajutorul celor două reguli.

După al treilea pas inductiv obținem formulele:

$$(q \vee \rceil q) \Rightarrow s \qquad (q \Rightarrow (r_1 \wedge r_2)) \Rightarrow s \text{ etc.}$$

Operatorul (tipărit îngroşat) introdus de regula R2 se numeşte *operatorul principal* al formulei respective.

Parantezele pe care le-am introdus au rolul de a delimita operatorul principal, al fiecărei formule, de restul formulei. Pentru a nu supraîncărca notația putem renunța la o parte din ele adoptând următoarea

4B. *Convenție*. Într-o formulă în care apare un singur $\Leftrightarrow$ acesta este operatorul principal.

Dacă $\Leftrightarrow$ nu apare şi apare un singur $\Rightarrow$, acesta va fi operatorul principal, ş.a.m.d.

Astfel am introdus pentru fiecare dintre cei cinci operatori câte un ordin de prioritate: cel maxim pentru $\Leftrightarrow$, apoi $\Rightarrow$ etc. până la $\rceil$. Iată ordinea completă a lor

$$\Leftrightarrow, \Rightarrow, \vee, \wedge, \rceil$$

Exemple. În formula (fără paranteze)

$$p \vee q \wedge r \Leftrightarrow \rceil p \Rightarrow q \wedge r$$

operatorul principal este $\Leftrightarrow$. Cele două formule din care s-a obținut, prin aplicarea regulei R2, această formulă sunt

$$p \vee q \wedge r \text{ şi } \rceil p \Rightarrow q \wedge r$$

Ele au ca operatori principali $\vee$ şi respectiv $\Rightarrow$.

Scrisă cu paranteze, formula inițială va fi

$$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((\rceil p) \Rightarrow (q \wedge r))$$[1]

Observație. Sunt cazuri în care parantezele devin indispensabile:

---

[1] De multe ori se adoptă o variantă intermediară de scriere; de pildă în cazul de față ea poate fi

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (\rceil p \Rightarrow q \wedge r).$$

când apar doi operatori identici sau când operatorul principal nu are, printre ceilalți operatori ai formulei, ordinul maxim de prioritate.

Exemple. 1) $p \Rightarrow q \Rightarrow p \wedge q$ poate fi citită drept

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q) \text{ sau drept } p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q).$$

2) Formula $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow p \wedge q)$, în absența parantezelor ar trebui citită drept $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$.

§8. Validitate propozițională

La fel cum calculul algebric se dezvoltă pe baza identităților algebrice, calculul logic se dezvoltă pe baza identităților logice. În calculul propozițional acestea sunt formulele propozițional valide. În fața fiecăreia dintre ele vom pune simbolul: $\models$

Exemple: $\models p \vee \rceil p$ (terțul exclus)

$\models p \Leftrightarrow \rceil\rceil p$ (negarea negației)

$\models p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ (*modus ponens*)

În paranteză am adăugat denumirile principiilor logice pe care fiecare dintre aceste formule le transcriu în limbaj simbolic. Astfel, principiul terțului exclus afirmă că orice propoziție logică este adevărată sau falsă; principiul negării negației (sau dublei negații) afirmă că orice propoziție este echivalentă negării negației sale; asupra principiului *modus ponens* ne vom opri în paginile următoare.

Pentru a exprima un astfel de principiu ar trebui să-l enunțăm pentru fiecare propoziție logică P, Q, R etc. în parte; să scriem de pildă

$$P \vee \rceil P,\ Q \vee \rceil Q,\ R \vee \rceil R \text{ etc.}$$

Aceasta se va putea realiza înlocuind P cu variabila propozițională p, variabilă ce ține locul oricărei propoziții logice.

Când spunem că formula

$$p \vee \rceil p$$

este propozițional validă înțelegem faptul că orice propoziție logică (*P, Q, R* etc.) am pune în locul lui *p*, propoziția logică obținută prin această înlocuire este adevărată. De pildă „plouă sau nu plouă", „e soare sau nu e soare" sunt adevărate. Deşi astfel de exprimări nu oferă nimic interesant din punct de vedere al cunoaşterii, filosoful şi logicianul austriac L. Wittgenstein le consideră „osatura lumii"[1].

Rămâne deschisă problema: cum putem stabili că o astfel de formulă este, după expresia lui Wittgenstein, o *tautologie*, dacă nu avem posibilitatea de a înlocui *p* cu fiecare dintre propozițiile logice (acestea fiind în număr nelimitat)?

5B. *Tabela* şi *funcția de adevăr* a unei formule propoziționale. Deşi în număr-potențial infinit, propozițiile logice se împart în două categorii: adevărate şi false.

Dacă *P* este adevărată, $\urcorner P$ este falsă (TAB $\urcorner$), iar $P \vee \urcorner P$ este A $\vee$ F adică A (TAB $\vee$).

Dacă *P* este falsă, $\urcorner P$ este adevărată, iar $P \vee \urcorner P$ este F $\vee$ A, adică A.

Prin urmare, deoarece negația şi disjuncția logică sunt funcții (numai) de valoarea de adevăr a lui *P*, este suficient să verificăm că propoziția $P \vee \urcorner P$ este adevărată pentru o singură propoziție adevărată şi – respectiv – pentru o singură propoziție falsă pentru a trage concluzia că formula $p \vee \urcorner p$ este validă.

Concluzia, mai generală, ce se poate trage dintr-un astfel de raționament este că fiecare formulă propozițională α defineşte câte o funcție de adevăr.

De pildă, formulele $\urcorner p, p \wedge q, p \vee q, p \Rightarrow q, p \Leftrightarrow q$ definesc funcțiile de adevăr explicitate prin TAB $\urcorner$, TAB $\wedge$, TAB $\vee$, TAB $\Rightarrow$, TAB $\Leftrightarrow$ respectiv.

În general notăm TAB α tabela de adevăr a formulei α – tabelă ce explicitează funcția de adevăr definită de α.

[1] *Tractatus Logico-Philosophicus*, propoziția 6.124.

Exemple. 1) Pentru α: $p \vee \urcorner p$ tabela va fi conform celor de mai sus

p	$\urcorner p$	$p \vee \urcorner p$
A	F	A
F	A	A

TAB $p \vee \urcorner p$

2) Pentru α: $p \wedge (p \Rightarrow q)$ tabela va fi

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$
A	A	A	A
A	F	F	F
F	A	A	F
F	F	A	F

TAB $p \wedge (p \Rightarrow q)$

3) Pentru α: $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ (*modus ponens*) tabela de adevăr va fi .

p	q	$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
A	A	A A A
A	F	F F A
F	A	F A A
F	F	F A A

TAB $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

Am condensat în această tabelă – sub forma celor trei coloane finale – rezultate pe care, în tabela anterioară le-am reprezentat separat. Sub fiecare dintre cei trei operatori ai formulei α am așezat coloana valorilor de adevăr corespunzătoare.

În concluzie, formula *modus ponens*

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

este propoziţional validă, având pe coloana operatorului său principal (cf. 3B) un şir neîntrerupt de A.

6B. *Definiţie.* Formula propoziţională α este *propoziţional validă* sau *identic adevărată* dacă în TAB α coloana corespunzătoare lui α este alcătuită numai din A.
Utilizăm în acest caz notaţia: $\models \alpha$.

7B. După structura ultimei coloane din TABα formulele propoziţionale α se împart în *valide*, *contingente* şi *inconsistente.* Astfel, când ultima coloană conţine

a) numai A: α este *validă*;

b) şi A şi F: α este *contingentă*;

c) numai F: α este *inconsistentă.*

În primele două cazuri α se numeşte *consistentă*, iar în ultimele două – *nevalidă.*

Exemplu. Formula $p \wedge \urcorner p$ având tabela de adevăr

p	$\urcorner p$	$p \wedge \urcorner p$
A	F	F
F	A	F

TAB $p \wedge \urcorner p$

este inconsistentă. Formula $\urcorner (p \wedge \urcorner p)$ va fi deci, cf. TAB $\urcorner$, validă

$$\models \urcorner (p \wedge \urcorner p).$$

Ea traduce simbolic *principiul necontradicţiei*: o propoziţie logică nu este în acelaşi timp adevărată şi falsă.

8B. *Căutarea unui contraexemplu.* Alcătuirea tabelei unei formule clarifică deplin statutul său (validă, contingentă sau inconsistentă). Când ea conține, de pildă, cinci variabile propoziționale, tabelul va avea $2^5 = 32$ de linii, presupunând foarte multe calcule.

Câteodată putem clarifica mai uşor statutul lui α, căutând un sistem de valori de adevăr ale variabilelor sale propoziționale pentru care α ia valoarea F. În caz că el există, poartă numele de *contraexemplu* al lui α şi probează că α este nevalidă. Când căutarea se blochează, arătând că nici un contraexemplu nu există, aceasta dovedeşte că formula α este validă.

Exemplu: $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \Rightarrow p \vee (q \wedge r)$

Notăm α: $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$, β: $p \vee (q \wedge r)$.

O formulă $\alpha \Rightarrow \beta$ este F dacă α este A şi β este F (TAB$\Rightarrow$).

Pentru ca α să fie A trebuie (TAB $\wedge$) ca

(1) $p \vee q$ şi $p \vee r$ să fie A.

Pentru ca β să fie F trebuie (TAB $\vee$) ca

(2) p şi $q \wedge r$ să fie F.

Trebuie, deci, găsite valorile pentru p, q, r care satisfac (1) şi (2).

Imposibil, deoarece $q \wedge r$ este F dacă sau q sau r este F. Dar p fiind F (cf.(2)), fie $p \vee q$, fie $p \vee r$ va fi F contrazicând (1).

Blocajul apărut dovedeşte că formula considerată este validă.

Pentru a compara metoda căutării unui contraexemplu cu cea a tabelei de adevăr, vom trata, cu aceasta din urmă, implicația conversă

$$\gamma : \beta \Rightarrow \alpha.$$

Tabela corespunzătoare este

$p \quad q \quad r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$ β	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ α	$\gamma: \beta \Rightarrow \alpha$
A A A						
A A F	F	A	A	A	A	A
A F A						
F A A						
A F F						
F A F	F	F	A	F	F	A
F F A						
F F F						

TAB γ

În ea cititorul trebuie să completeze cele şase linii rămase libere după modelul celor două completate. Utima coloană va fi alcătuită numai din A. Ceea ce dovedeşte că şi γ este validă.

Observaţie. Validitatea celor două implicaţii conduce la validitatea echivalenţei $\alpha \Leftrightarrow \beta$, adică

$$\models p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)^{1}.$$

§9. Substituţie şi detaşare

Principiile logicii propoziţionale se exprimă simbolic numai prin formule valide. De aceea descoperirea celor dintâi se face, în logica simbolică, prin determinarea formulelor valide.

Atât tabela de adevăr, cât şi variantele sale (căutarea de contraexemple etc.) sunt doar căi de *verificare* a validităţii unor formule date. În timp ce noi trebuie să *descoperim* formulele valide. Printre metodele unei asemenea activităţi se înscriu *substituţia* şi *detaşarea.*

a) **Substituţia**. Pentru a proba validitatea formulei propoziţionale

[1] S-a demonstrat, astfel, echivalenţa E_{26} de la pag. 95.

$$(1) \quad (p \wedge (q \vee r)) \vee \neg(p \wedge (q \vee r))$$

cititorul se poate aştepta la completarea unei tabele de adevăr complicate, în genul celei de mai sus. Dar privind mai atent, el poate să observe că de fapt această formulă are o structură mult mai simplă, perfect similară cu a formulei

$$(2) \quad p \vee \neg p.$$

Legătura dintre ele se stabileşte printr-o operaţie numită substituție. Ea constă, în cazul de față, în înlocuirea fiecăreia dintre cele două apariții ale variabilei propoziţionale p din (2) cu formula $p \wedge (q \vee r)$.

Întrucât (2) este validă (cf. TAB $p \vee \neg p$) formula (1) va fi şi ea validă. De ce?

Foarte simplu. Când determinăm, pentru valori de adevăr ale lui p, q şi r date, valoarea de adevăr a lui (1), calculăm mai întâi valoarea de adevăr a formulei $p \wedge (q \vee r)$, apoi o introducem ca valoare a lui p în tabela de adevăr a lui (2). De aceea, în coloana finală găsim întotdeauna A.

9B. *Proprietate.* Dacă într-o formulă propozițional validă substituim o variabilă propozițională — peste tot unde apare în formula respectivă — printr-o formulă propozițională oarecare, atunci obținem o formulă propozițional validă.

10B. *Observație.* Această proprietate nu are loc dacă substituția nu se face *peste tot* sau *uniform.*

Spre exemplu, dacă înlocuim în

$$p \vee \neg p$$

numai primul p cu $p \wedge (q \vee r)$, iar al doilea îl lăsăm neînlocuit, obținem formula

$$(p \wedge (q \vee r)) \vee \neg p.$$

Ea este falsă când p este A, iar q şi r sunt F (verificați!)

b) **Detaşarea**

11B. *Proprietate.* Dacă α şi β sunt formule propoziţionale astfel încât

$$\models \alpha \text{ şi } \models \alpha \Rightarrow \beta,$$

atunci

$$\models \beta.$$

Proprietatea decurge direct din TAB⇒: când propoziţiile logice P şi $P \Rightarrow Q$ sunt adevărate, propoziţia Q este adevărată.

Ea se numeşte detaşare (sau *modus ponens* – după principiul logic pe care se bazează) deoarece permite desprinderea (validităţii) concluziei β din ipotezele (valide) α şi $\alpha \Rightarrow \beta$.

§10. Echivalenţa formulelor propoziţionale

12B. *Definiţie.* Formulele propoziţionale α şi β se numesc *echivalente* dacă

$$\models \alpha \Leftrightarrow \beta.$$

Utilizăm în acest caz notaţia

$$\alpha \sim \beta.$$

13B. *Proprietate.* Relaţia $\alpha \sim \beta$ are loc dacă pentru orice valori de adevăr ale variabilelor propoziţionale ce apar în cele două formule, valorile de adevăr corespunzătoare lui α şi β (din TABα şi respectiv TABβ) coincid.

Constatarea echivalenţei se poate face alcătuind o tabelă de adevăr pentru amândouă formulele plecând de la *toate* variabilele propoziţionale ce apar în ele.

Exemplu. Dacă

$$\alpha : p \vee \neg p \Rightarrow q \text{ şi } \beta : q,$$

atunci tabela de adevăr a celor două pleacă de la variabilele propoziționale p şi q

p	q	$p \vee \neg p \Rightarrow q$
A	A	A A
A	F	A F
F	A	A A
F	F	A F

Echivalența $\alpha \sim \beta$ rezultă în urma constatării că a doua şi ultima coloană coincid[1].

Observație. Dacă am fi alcătuit separat tabela formulei q – care este

q
A
F

– o comparație directă între coloanele lui α şi β nu se putea face!

Relația de echivalență joacă în calculul logic rolul pe care identitatea îl joacă în calculul algebric.

Ea are trei proprietăți importante şi anume:

a) pentru orice formulă α: $\alpha \sim \alpha$;

b) pentru orice formule α şi β: dacă $\alpha \sim \beta$, atunci $\beta \sim \alpha$;

c) pentru orice formule α, β, γ: dacă $\alpha \sim \beta$ şi $\beta \sim \gamma$, atunci $\alpha \sim \gamma$.

Prima se numeşte *reflexivitate*, a doua *simetrie*, iar a treia *tranzitivitate*.

[1] În virtutea acestei echivalențe când spune „... eu am, n-am înfățişare, la douăsprece trecute fix mă duc la tribunal!...", Farfuridi afirmă de fapt „la douăsprece trecute fix mă duc la tribunal!" (a se vedea 3A).

O relație având aceste trei proprietăți se numeşte echivalență (în cazul nostru – una logică) şi împarte formulele propoziționale în *clase de echivalență.*

Orice două formule din aceeaşi clasă sunt echivalente între ele, iar formulele din clase diferite sunt neechivalente.

Astfel, toate formulele valide alcătuiesc o singură clasă; la fel şi cele contradictorii (inconsistente); p şi $\rceil\rceil p$ se află în aceeaşi clasă, dar p şi q se află în clase diferite etc.

Plecând de la o echivalență cunoscută

$$\alpha \sim \beta$$

putem descoperi noi echivalențe în virtutea unei proprietăți de înlocuire a expresiilor echivalente.

Astfel, dacă γ_α este o formulă propozițională în care apare – ca parte alcătuită din simboluri consecutive ale sale – formula propozițională α, vom nota γ_β rezultatul înlocuirii lui α cu β (în una sau mai multe dintre aparițiile sale în γ_α).

Exemplu. γ_α: $(p \Rightarrow p \vee q) \wedge (p \vee q)$

$$\alpha : p \vee q, \quad \beta : q \vee p$$

Atunci γ_β poate fi oricare dintre formulele:

$$(p \Rightarrow q \vee p) \wedge (p \vee q), \quad (p \Rightarrow p \vee q) \wedge (q \vee p),$$
$$(p \Rightarrow q \vee p) \wedge (q \vee p).$$

14B. *Proprietate.* Dacă $\alpha \sim \beta$, atunci $\gamma_\alpha \sim \gamma_\beta$.

Astfel, deoarece conform E_7[1]

$$p \vee q \sim q \vee p,$$

rezultă

$$\gamma_\alpha \sim \gamma_\beta$$

pentru oricare γ_β dintre cele trei de mai sus.

Proprietatea are multe consecințe utile, printre care şi următoarea:

[1] La pagina 94 găsiţi o listă cu 50 de echivalenţe logice valide notate E_1, ..., E_{50}.

DN (dubla negație). Suprimând sau introducând o dublă negație ($\rceil\rceil$) în fața oricărei formule ce apare în interiorul unei formule α, se obține o formulă echivalentă cu α.

15B. *Observație.* Formulele calculului propozițional au fost construite cu ajutorul a cinci operatori logici

$$\rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

În virtutea proprietății 14B și a unora dintre echivalențele E_{10}, E_{11}, E_{13}, E_{14}, E_{17}, E_{18} fiecare dintre ele este echivalentă cu câte o formulă conținând doar operatorii $\rceil$, $\wedge$ respectiv $\rceil$, $\vee$.

Exemplu. γ_α: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

$$\alpha : q \Rightarrow r$$

a) Dacă notăm β: $\rceil(q \wedge \rceil r)$, conform E_{14}

$$\alpha \sim \beta,$$

deci, aplicând 14B,

$$\gamma_\alpha \sim \gamma_\beta,$$

unde $\gamma_\beta : p \Rightarrow \rceil(q \wedge \rceil r)$.

Substituind în E_{14}, q cu $\rceil(q \wedge \rceil r)$, obținem conform 9B

$$\gamma_\beta \sim \rceil(p \wedge \rceil\rceil(q \wedge \rceil r)) \underset{DN}{\sim} \rceil(p \wedge (q \wedge \rceil r)).$$

Astfel, prin tranzitivitatea echivalenței

$$\gamma_\alpha \sim \rceil(p \wedge (q \wedge \rceil r)).$$

b) Dacă notăm $\beta : \rceil q \vee r$, conform E_{13}

$$\alpha \sim \beta,$$

deci aplicând 14B:

$$\gamma_\alpha \sim \gamma_\beta,$$

unde

$$\gamma_\beta : p \Rightarrow \rceil q \vee r.$$

Substituind în E_{13}, q cu $\rceil q \vee r$, obținem conform 9B

$$\gamma_\beta \sim \neg p \vee (\neg q \vee r),$$

iar prin tranzitivitatea echivalenţei

$$\gamma_\alpha \sim \neg p \vee (\neg q \vee r).$$

§11. Dualizarea formulelor propoziţionale

Echivalenţele

$$E_8\colon \neg(\alpha \wedge \beta) \sim \neg\alpha \vee \neg\beta$$

$$E_9\colon \neg(\alpha \vee \beta) \sim \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

(cf. pag. 94) numite *legile De Morgan*[1] evidenţiază o simetrie între operatorii $\wedge$ şi $\vee$. Ea poate fi utilizată în scopul transformării unei formule propoziţionale α care conţine doar cei doi operatori şi variabile propoziţionale simple sau negate.

Exemplu:

$$\gamma : p \vee (q \wedge \neg r).$$

$$\neg\gamma \underset{E_9}{\sim} \neg p \wedge \neg(q \wedge \neg r) \underset{E_8}{\sim} \neg p \wedge (\neg q \vee \neg\neg r) \underset{DN}{\sim} \neg p \wedge (\neg q \vee r).$$

Notăm $\bar{\gamma} : \neg p \wedge (\neg q \vee r)$ şi rezultă

$$\neg\gamma \sim \bar{\gamma}.$$

16B. *Proprietate.* Formula γ conţine doar operatorii $\wedge$, $\vee$ şi variabile propoziţionale simple şi/sau negate.

$\bar{\gamma}$ se obţine din γ schimbând între ei $\wedge$ cu $\vee$, iar variabilele propoziţionale simple cu cele negate şi invers.

Atunci:

$$\neg\gamma \sim \bar{\gamma}.$$

[1] Logicianul care, deşi nu le-a descoperit, le-a arătat utilitatea.

Numim *duala* unei formule propoziționale α ce conține doar operatorii $\wedge$, $\vee$ şi variabile propoziționale simple şi/sau negate, formula α' obținută din ea inversând operatorii $\wedge$ şi $\vee$ între ei.

Exemplu. Dacă α: $p \vee (p \wedge \rceil q)$, atunci α': $p \wedge (p \vee \rceil q)$. Să observăm că $(\alpha')'$ este α.

17B. *Proprietate.* Dacă α şi β sunt formule propoziționale de tipul descris în proprietatea 16B, iar α' şi β' sunt dualele lor şi dacă $\alpha \sim \beta$, atunci $\alpha' \sim \beta'$.
Reciproc:
dacă $\alpha' \sim \beta'$, atunci $\alpha \sim \beta$.

Reciproca, se obține din proprietatea directă utilizând faptul că $(\alpha')'$ este α şi $(\beta')'$ este β.

Vom demonstra proprietatea 17B în cazul formulelor

$$\alpha : p \vee (q \wedge r), \quad \beta : (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Din $\alpha \sim \beta$ (vezi observația de la pag. 16) rezultă, cf. 14B, că:

$$\rceil \alpha \sim \rceil \beta.$$

Pe de altă parte, cf. 16B, avem:

$$\rceil \alpha \sim \bar{\alpha} \text{ şi } \rceil \beta \sim \bar{\beta}.$$

Deci $\bar{\alpha} \sim \bar{\beta}$, adică

$$\rceil p \wedge (\rceil q \vee \rceil r) \sim (\rceil p \wedge \rceil q) \vee (\rceil p \wedge \rceil r).$$

Substituind p cu $\rceil p$, q cu $\rceil q$, r cu $\rceil r$, conform 9B rezultă:

$$\rceil\rceil p \wedge (\rceil\rceil q \vee \rceil\rceil r) \sim (\rceil\rceil p \wedge \rceil\rceil q) \vee (\rceil\rceil p \wedge \rceil\rceil r).$$

În final, suprimând dublele negații pe baza regulei DN, obținem:

$$p \wedge (q \vee r) \sim (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

Aceasta este proprietatea de distributivitate a conjuncţiei faţă de disjuncţie.

Aşadar, cele două legi de distributivitate ($\wedge$ faţă de $\vee$, $\vee$ faţă de $\wedge$) sunt duale una celeilalte. Validitatea uneia o implică, în virtutea proprietăţii 17B, pe a celeilalte.

§12. Forme normale

a) *Forma normală conjunctivă.* Verificarea validităţii unei formule propoziţionale prin tabele corespunzătoare de adevăr este un procedeu incomod. Pentru anumite formule însă, validitatea (sau nevaliditatea) se poate observa *direct.*

Acesta este cazul disjuncţiilor de două sau mai multe variabile propoziţionale simple sau negate.

Exemple. 1) Disjuncţia[1]

$$p \vee q \vee \neg p$$

conţine aceeaşi variabilă propoziţională (p) simplă şi negată. Deci tabela ei de adevăr va avea pe ultima coloană valoarea A şi când p este A şi când p este F; disjuncţia este validă.

2) Dimpotrivă, disjuncţia

$$p \vee q \vee \neg r$$

este F când p, q sunt F şi r este A.

Concluzie. O disjuncţie de variabile propoziţionale simple şi/sau negate este validă dacă şi numai dacă aceeaşi variabilă apare simplă şi negată.

3) Formula α: $p \vee \neg q \vee (q \wedge \neg p)$ este echivalentă, în virtutea distributivităţii disjuncţiei faţă de conjuncţie (E_{26} de la pag. 95) cu

---

[1] În virtutea echivalenţei

E_{23}. $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \sim (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ (asociativitatea disjuncţiei)

parantezele pot fi, în acest caz, omise.

$$(p \vee \rceil q \vee q) \wedge (p \vee \rceil q \vee \rceil p).$$

O conjuncție este validă numai atunci când fiecare termen al său este o formulă validă. Ceea ce este, în cazul de față, adevărat. Aşadar α este validă.

În general, orice formulă propozițională α poate fi transformată într-o formulă, echivalentă cu ea, de forma[1]

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$$

în care fiecare α_i este o disjuncție de variabile propoziționale simple şi/sau negate. Aceasta se numeşte *forma normală conjunctivă* a lui α.

Dacă în fiecare α_i figurează cel puțin o variabilă propozițională atât simplă cât şi negată, atunci α este validă.

Dacă în cel puțin un α_i acest lucru nu se întâmplă, atunci α nu este validă.

b) *Forma normală disjunctivă.* Formula $\rceil\alpha$ este validă dacă α este inconsistentă (sau identic falsă) şi reciproc.

Proprietatea unei formule propoziționale α de a fi identic falsă se poate constata – fără alcătuirea unei tabele de adevăr – prin transformarea ei într-o formulă echivalentă de tipul

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n$$

unde fiecare α_i este o conjuncție de variabile propoziționale simple şi/sau negate.

Conform TAB $\vee$, α este identic falsă numai atunci când fiecare α_i este identic falsă.

La rândul său formula α_i este identic falsă atunci şi numai atunci când în ea figurează o aceeaşi variabilă propozițională atât simplă cât şi negată.

Exemplu. Formula α: $p \wedge q \wedge (\rceil p \vee \rceil r)$ se transformă în virtutea distributivității conjuncției față de disjuncție (E_{25} de la pag. 95) în formula echivalentă

[1] Omiterea parantezelor se datorează echivalenței

E_{22}. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \sim (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ (asociativitatea conjuncției)

$$(p \wedge q \wedge \urcorner p) \vee (p \wedge q \wedge \urcorner r)$$

Ea reprezintă o formă normală disjunctivă a lui α. Întrucât al doilea termen al disjuncției nu este inconsistent (ia valoarea A când p și q sunt A, iar r este F) nici α nu este inconsistentă (fiind A pentru aceleași valori ale lui p, q și r).

Prin urmare $\urcorner\alpha$ nu este validă.

C. Axiomatizarea calculului propozițional

§13. Metoda axiomatică

În lucrarea „Elementele”, Euclid din Alexandria face, aproximativ cu 300 de ani înainte de Hristos, o expunere sistematică a propozițiilor fundamentale ale geometriei din vremea sa. Plecând de la un număr restrâns de *axiome* și *postulate* el deduce, pe cale logică, toate celelalte propoziții. Deși, raportată la standardele de azi, lucrarea conține unele imperfecțiuni, ea a rămas modelul de conciziune și rigoare în prezentarea unui ansamblu de cunoștințe teoretice. S-a bucurat de un așa de mare succes încât, în secolul al XVII-lea, filosoful olandez B. Spinoza își scria tratatul său de etică în forma axiomatic deductivă a Elementelor.

Apogeul metodei axiomatice urma să fie atins tot în geometrie, 2200 de ani după Euclid, prin cercetări legate de postulatul paralelelor[1]. Apariția unor geometrii „neeuclidiene”, în care acest postulat este fals, a condus la o răsturnare a concepției despre „adevărat” și „fals” în științele deductive.

[1] Într-o formulare modernă, acest postulat afirmă „La o dreaptă dată, printr-un punct dat care nu se află pe dreaptă, trece o paralelă și numai una”.

Concomitent, apariția unor paradoxuri în teoria mulțimilor[1] a focalizat atenția cercetătorilor domeniului asupra demonstrației matematice, introducând standarde ridicate de rigoare formală. S-a impus astfel ideea după care însăşi logica – componentă esențială a oricărei demonstrații – să fie organizată după modelul axiomatic deductiv propus de Euclid.

Aceasta presupune o ierarhizare a principiilor logice, unele fiind alese drept axiome din care toate celelalte se deduc pe baza unor reguli explicit formulate. Deducția capătă caracterul unor transformări ce se fac în virtutea formei şi nu a conținutului.[2]

§14. Axiome şi reguli deductive

a) *Axiome.* În orice ştiință deductivă un adevăr este recunoscut ca atare dacă producem o *demonstrație* a sa. Cum orice demonstrație pleacă de la adevăruri anterior recunoscute, vor exista, cu necesitate, adevăruri fără demonstrație. Acestea sunt *axiomele*.

Alegerea axiomelor calculului propozițional nu este arbitrară, deşi există mai multe alegeri posibile.

În primul rând, axiomele trebuie să fie formule *valide*. Axiomele trebuie să fie „suficiente" în sensul de a putea deduce din ele toate formulele valide. Întotdeauna verifică şi condiția de a reprezenta „minimul" suficient (adică să nu putem deduce pe una din celelalte).

Prezentăm în cele ce urmează un sistem alcătuit din 13 axiome, propus de logicianul german G. Gentzen[3]. Ele se împart

---

[1] A se vedea anexa III.

[2] Acest tip de exigențe au fost formulate în cadrul unui program de fundamentare a întregii matematici inițiat şi condus de matemàticianul german D. Hilbert (1862-1943). El s-a numit „programul formalist" (cf. anexa III).

[3] *Untersuchungen über das Logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift, vol. 39, pg. 176-210, 405-431.

în 5 grupe, fiecare corespunzând câte unuia dintre cei 5 operatori logici.

Primele două sunt axiomele de introducere a operatorului $\Rightarrow$ într-o formulă logică (pe scurt: axiome de $\Rightarrow$ - introducere):

$$(ax\ 1a) \qquad p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

$$(ax\ 1b) \quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

Următoarele trei se referă la operatorul $\wedge$; prima este axioma de introducere a operatorului $\wedge$ ($\wedge$ - introducere) într-o formulă logică

$$(ax\ 2) \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q),$$

celelalte două fiind axiome de eliminare a sa ($\wedge$ - eliminare)

$$(ax\ 3a) \quad p \wedge q \Rightarrow p, \qquad (ax\ 3b) \quad p \wedge q \Rightarrow q.$$

Alt grup de trei axiome se referă la operatorul $\vee$:
două sunt de $\vee$-introducere

$$(ax\ 4a) \quad p \Rightarrow p \vee q, \qquad (ax\ 4b) \quad q \Rightarrow p \vee q,$$

iar una de $\vee$-eliminare

$$(ax\ 5) \ (p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)).$$

Pentru negație sunt două axiome, una de $\rceil$-introducere:

$$(ax\ 6) \qquad (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \rceil q) \Rightarrow \rceil p),$$

iar cealaltă de $\rceil$-eliminare (de fapt $\rceil\rceil$-eliminare):

$$(ax\ 7) \qquad \rceil\rceil p \Rightarrow p.$$

În sfârşit, trei axiome referitoare la $\Leftrightarrow$ se împart în:
una de $\Leftrightarrow$-introducere

$$(ax\ 8) \qquad (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q))$$

şi două de $\Leftrightarrow$ - eliminare

(ax 9a) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$, (ax 9b) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

b) *Reguli deductive*

Regula *S* (substituția).

Din formula propozițională α se deduce formula

$$\alpha\left({}^{p_1}\!/_{\beta_1}, \ldots, {}^{p_n}\!/_{\beta_n}\right)$$

obținută substituind în α variabilele propoziționale distincte p_1, …, p_n, cu formulele propoziționale β_1, …, β_n respectiv.

Regula *D* (detașarea).

Din formulele propoziționale α și $\alpha \Rightarrow \beta$ se deduce formula β.

Observație. Regula *D*, numită și $\Rightarrow$ - eliminare ține locul unei axiome de $\Rightarrow$ - eliminare ce nu figurează printre cele 13 axiome de mai sus.

§15. Demonstrație și deducție

Înainte de a preciza ce este demonstrația să considerăm un:

1C. *Exemplu* de demonstrație în calculul propozițional.

(1) $p \Rightarrow (p \Rightarrow p)$ — *ax* 1*a* (q/p) *S*

(2) $(p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p))$

ax 1*b* $(q/p \Rightarrow p, r/p)$ *S*

(3) $(p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$ — 1,2 *D*

(4) $p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)$ — *ax*1*a* $(q/p \Rightarrow p)$ *S*

(5) $p \Rightarrow p$ — 4,3 *D*

Aşadar, un şir de 5 formule propoziționale obținute fiecare, fie prin substituție dintr-o axiomă, fie prin detaşare din două formule anterioare ei în şir.

Şirul de mai sus este demonstrația formulei $p \Rightarrow p$, ce devine – în virtutea existenței acestei demonstrații – o *teoremă* a calculului propozițional.

2C. *Definiție.* Se numeşte *demonstrație* în calculul propozițional un şir finit de formule propoziționale, fiecare dintre acestea fiind

a) fie o axiomă sau obținută prin substituție dintr-o axiomă;

b) fie obținută ca rezultat al aplicării regulii D pentru două formule anterioare ei în şir.

Formula finală a unei demonstrații se numeşte *teoremă*.

3C. *Definiție.* Se numeşte *deducție* – în calculul propozițional – din formulele propoziționale $\alpha_1, ..., \alpha_m$, un şir finit de formule propoziționale, fiecare dintre ele fiind

a) fie o formulă α_i ($i = 1, ..., m$);

b) fie obținută prin S dintr-o axiomă;

c) fie obținută prin D din două formule anterioare ei în şir.

Formulele $\alpha_1, ..., \alpha_m$ se numesc *ipotezele* deducției, iar formula finală a deducției, β, este *concluzia* sa.

Notație: $\alpha_1, ..., \alpha_m \vdash \beta$.

Relația $\vdash$, existentă în acest caz între ipoteze şi concluzie, poartă numele de *relație de deductibilitate* în calculul propozițional.

4C. *Exemplu.* $q, p, p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \vdash r$ este o relație de deductibilitate.

Iată deducția corespunzătoare:

1) q	ipoteză
2) p	ipoteză
3) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	ipoteză

4) $q \Rightarrow r$ 2,3 D
5) r 1,4 D

Se observă că o demonstrație este cazul particular al unei deducții fără ipoteze. Aşadar, fiecare teoremă este concluzia unei deducții fără ipoteze. Motiv pentru care vom pune înaintea fiecărei teoreme semnul $\vdash$. De pildă:

$$\vdash p \Rightarrow p.$$

De obicei, prin extensie, acelaşi semn se pune şi în fața axiomelor, ce pot fi considerate ca un caz limită de teoreme a căror demonstrație se reduce la o singură formulă: axioma însăşi.

§16. Elemente de teoria demonstrației

Proprietățile relației de deductibilitate şi ale cazului său particular – demonstrabilitatea – formează obiectul *teoriei demonstrației.* Ea s-a dezvoltat ca o combinatorică a şirurilor finite de simboluri ce se transformă după reguli clare şi explicite.

Enunțăm în continuare proprietăți ale relației de deductibilitate, în care α, β, γ, α_1, β_1, ... sunt formule propoziționale.

5C. $\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_m \vdash \alpha_i$ pentru orice $i = 1, ..., m$.

6C. Dacă $\alpha_1, ..., \alpha_m \vdash \beta_1$; ... ; $\alpha_1, ..., \alpha_m \vdash \beta_p$ şi dacă $\beta_1, ..., \beta_p \vdash \gamma$, atunci $\alpha_1, ..., \alpha_m \vdash \gamma$.

7C. Dacă $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$, atunci $\alpha \vdash \beta$.

8C. Dacă $\alpha_1, ..., \alpha_{m-1} \vdash \alpha_m \Rightarrow \beta$, atunci $\alpha_1, ..., \alpha_{m-1}, \alpha_m \vdash \beta$.

9C. Dacă $\alpha \vdash \beta$, atunci $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

10C. Dacă $\alpha_1, ..., \alpha_m \vdash \beta$, atunci $\alpha_1, ..., \alpha_{m-1} \vdash \alpha_m \Rightarrow \beta$.

Prima dintre proprietăţi se referă la cazul unei deducţii în care concluzia coincide cu una dintre ipoteze. Deducţia se reduce, în acest caz, la ipoteza α_i.

Pentru 6C plecăm de la o deducţie a lui γ din $\beta_1, ..., \beta_p$. În acest şir de formule intercalăm, în faţa fiecărui β_i, un şir reprezentând deducţia lui β_i din ipotezele $\alpha_1, ..., \alpha_m$. Noul şir de formule astfel obţinut va reprezenta deducţia lui γ din $\alpha_1, ..., \alpha_m$.

Exemplu. În deducţia

p(ipoteză), r(ipoteză), $p \Rightarrow (r \Rightarrow p \wedge r)$ (ax 2), $r \Rightarrow p \wedge r$ (D), $p \wedge r$ (D)
justificând relaţia de deductibilitate

$$p, r \vdash p \wedge r,$$

intercalăm, în faţa primei ipoteze, deducţia

$$p \wedge (q \Rightarrow r) \text{ (ip.)}, p \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \ (ax\ 3a), p\ (D),$$

justificând relaţia de deductibilitate

$$q, p \wedge (q \Rightarrow r) \vdash p.$$

În faţa celei de a doua ipoteze intercalăm deducţia

$$p \wedge (q \Rightarrow r) \text{ (ip.)}, p \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)\ (ax\ 3b),$$
$$q \Rightarrow r\ (D), q \text{ (ip.)}, r(D),$$

justificând relaţia de deductibilitate

$$q, p \wedge (q \Rightarrow r) \vdash r.$$

Şirul de formule obţinut prin aceste intercalări

(1) $p \wedge (q \Rightarrow r)$	ip.	
(2) $p \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow p$	ax 3a	S

(3) p	1, 2	D
(4) $p \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$ax\ 3b$	S
(5) $q \Rightarrow r$	1,4	D
(6) q	ip.	
(7) r	5,6	D
(8) $p \Rightarrow (r \Rightarrow p \wedge r)$	$ax\ 2$	
(9) $r \Rightarrow p \wedge r$	3,8	D
(10) $p \wedge r$	7,9	D

justifică relația de deductibilitate

$$q, p \wedge (q \Rightarrow r) \vdash p \wedge r.$$

7C este un caz particular al proprietății 8C.

În cazul celei din urmă, pentru a găsi o deducție a formulei β din ipotezele $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ pornim de la deducția lui $\alpha_m \Rightarrow \beta$ din ipotezele $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, deducție pe care o completăm astfel

(k)	$\alpha_m \Rightarrow \beta$		
$(k+1)$	α_m	ip.	
$(k+2)$	β	$k, k+1$	D

Acest șir de $k + 2$ formule reprezintă deducția lui β din aceleași ipoteze și justifică relația de deductibilitate

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m \vdash \beta.$$

9C este un caz particular al proprietății 10C numită și *teorema deducției*. Ea fundamentează una dintre cele mai larg răspândite metode de demonstrare a unei implicații $\alpha \Rightarrow \beta$; anume aceea prin care, plecând de la ipoteza α deducem concluzia β.

Ilustrăm printr-un exemplu metoda de a demonstra 10C.

Plecând de la deducţia (cf. 4C) corespunzàtoare relaţiei de deductibilitate

$$q, p, p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \vdash r$$

vom construi deducţia corespunzătoare relaţiei de deductibilitate

$$q, p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \vdash p \Rightarrow r$$

Reamintim că prima deducţie este alcătuită din 5 formule:

$$q, \qquad p, p \Rightarrow (q \Rightarrow r), \qquad q \Rightarrow r, \qquad r.$$

Pentru a o construi pe cea de a doua plecăm de la şirul de 5 formule:

$$(*) \qquad p \Rightarrow q, p \Rightarrow p, p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)), p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p \Rightarrow r$$

Deşi se termină cu formula-concluzie a celei de-a doua relaţii de deductibilitate, el nu este, cum se poate observa, o deducţie din ipotezele q şi $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

În schimb, reprezintă „scheletul" pe care vom construi o astfel de deducţie. Şi anume intercalând înaintea fiecăreia dintre formulele şirului (*) o deducţie a formulei respective din ipotezele q şi $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. Pentru a putea urmări mai lesne procedeul, aşezăm în coloane paralele deducţia iniţială şi pe cea obţinută din (*) prin intercalare.

Deducția inițială		Deducția obținută din (*) prin intercalare	
	(1)	q	ipoteză
	(2)	$q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	$ax1a$ S
q	(3)	$p \Rightarrow q$	1,2 D
	(4)	$p \Rightarrow (p \Rightarrow p)$	
	(5)	$(p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p))$	demonstrația
	(6)	$(p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$	din
	(7)	$p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)$	exemplul 1C
p	(8)	$p \Rightarrow p$	
	(9)	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	ipoteză
	(10)	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)))$	$ax\ 1a$ $(p/p \Rightarrow (q \Rightarrow r), q/p)$ S
$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	(11)	$p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$	9,10 D
	(12)	$\{p \Rightarrow p\} \Rightarrow \{p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))\}$	$ax1b$ $(q/p, r/q \Rightarrow r)$ S
	(13)	$(p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$	8,12 D
$q \Rightarrow r$	(14)	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	11,13 D
	(15)	$(p \Rightarrow p) \Rightarrow [(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$	$ax\ 1b$ S
	(16)	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	8,15 D
r	(17)	$p \Rightarrow r$	14,16 D

§17. Necontradicţia calculului propoziţional

Cititorul şi-a putut face deja o părere asupra metodelor prin care se obţin demonstraţiile în calculul propoziţional. Unul dintre primele scopuri ale teoriei demonstraţiei este de a arăta că în urma procesului demonstrativ nu se poate ajunge la o teoremă α şi în acelaşi timp la teorema $\neg\alpha$. Proprietatea în cauză se numeşte necontradicţia sau *consistenţa* calculului propoziţional. Ea decurge din următoarea

11C. *Proprietate.* Orice teoremă a calculului propoziţional este o formulă propoziţional validă.

Adică,

$$\text{dacă } \vdash \alpha, \text{ atunci } \models \alpha,$$

pentru orice formulă propoziţională α.

Această proprietate este consecinţa următoarelor fapte.

a) Cele 13 axiome ale calculului propoziţional sunt formule propoziţional valide.

b) Conform 9B o formulă obţinută prin regula substituţiei dintr-o formulă validă este, la rândul ei, validă.

c) Conform 11B o formulă obţinută prin regula de detaşare din două formule valide este şi ea validă.

Prin urmare, teoremele calculului propoziţional, care se obţin din axiome prin cele două reguli deductive, vor fi propoziţional valide.

12C. *Consistenţa* (sau *necontradicţia*) *calculului propoziţional.*

Pentru orice formulă propoziţională α, afirmaţiile

$$\vdash \alpha \text{ şi } \vdash \neg\alpha$$

nu sunt simultan adevărate.

Conform 11C, dacă $\vdash \alpha$ şi $\vdash \neg\alpha$ ar fi adevărate, atunci α şi $\neg\alpha$ ar fi propoziţional valide, ceea ce contrazice definiţia validităţii propoziţionale (6B) şi TAB$\neg$.

13C. *Observație.* În calculul propozițional are loc, pentru orice formule propoziționale α și β, relația de deductibilitate

$$\alpha, \neg\alpha \vdash \beta \; (\neg - \text{eliminarea, vezi §18})$$

Așadar, dacă pentru o formulă propozițională α, atât α cât și $\neg\alpha$ ar fi demonstrate, atunci toate formulele propoziționale ar fi demonstrabile. Astfel încât demonstrabilitatea n-ar mai putea servi drept criteriu al adevărului.

Consistența sau necontradicția implică așadar existența a cel puțin unei formule nedemonstrabile.

§18. Reguli deductive derivate

Pe măsură ce avansăm în procesul de demonstrare a teoremelor calculului propozițional, demonstrațiile devin lungi și de aceea greu de construit și chiar de urmărit. Motivul stă în numărul mic al regulilor deductive (două) pe care le putem utiliza. Putem lărgi însă acest număr asociind fiecărei axiome câte o regulă deductivă corespunzătoare. Acestea sunt de fapt proprietăți ale relației de deductibilitate (similare celor din §16) și care se pot demonstra. Ele se numesc reguli deductive derivate.

Pentru fiecare din cei 5 operatori logici dispunem de reguli de introducere și de reguli de eliminare a operatorului respectiv.

Astfel, pentru operatorul ⇒ :

⇒ – introducere

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta}$$

Această regulă în care Γ reprezintă o listă, posibil vidă, de formule propoziționale, corespunde proprietății 10C[1].

[1] Linia de fracție, cu ajutorul căreia am exprimat regula de ⇒ –introd. înlocuiește expresia „dacă... atunci...”.

⇒ - eliminare

$$\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$$

Aceasta este regula de detaşare sau *modus ponens*.

Pentru operatorul $\wedge$:

$\wedge$ - introducere

$$\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$$

$\wedge$ - eliminare

$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ şi $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$

Aşadar, o regulă de introducere şi două de eliminare.

Pentru operatorul $\vee$:

$\vee$ - introducere

$\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ şi $\beta \vdash \alpha \vee \beta$

$\vee$ - eliminare

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \gamma \qquad \Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \gamma}$$

Γ are aceeaşi semnificaţie ca în regula ⇒ - introducere.

Pentru operatorul $\rceil$:

$\rceil$ - introducere

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta \qquad \Gamma, \alpha \vdash \rceil\beta}{\Gamma \vdash \rceil\alpha}$$

$\rceil$ - eliminare

$\rceil\rceil\alpha \vdash \alpha$ şi $\alpha, \rceil\alpha \vdash \beta$

Prima dintre cele două reguli de $\rceil$ -eliminare se mai numeşte „eliminarea dublei negaţii” (DN-elimin.)

Pentru operatorul $\Leftrightarrow$:

$\Leftrightarrow$ – introducere

$$\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \alpha \vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$$

$\Leftrightarrow$ - eliminare

$\alpha \Leftrightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ și $\alpha \Leftrightarrow \beta \vdash \beta \Rightarrow \alpha$

Având la îndemână proprietățile 5C-10C și cele 14 reguli de deducție dispunem de mai multă libertate de mișcare în procesul de demonstrație. Iată, de exemplu, demonstrarea *regulii transpoziției*[1].

transpoziția

$$\alpha \Rightarrow \beta \vdash \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$$

(1) $\alpha \Rightarrow \beta, \alpha, \neg\beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ 5C

(2) $\alpha \Rightarrow \beta, \alpha, \neg\beta \vdash \alpha$ 5C

(3) $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$ $\Rightarrow$ -elim.

(4) $\alpha \Rightarrow \beta, \alpha, \neg\beta \vdash \beta$ 1, 2, 3 6C

(5) $\alpha \Rightarrow \beta, \alpha, \neg\beta \vdash \neg\beta$ 5C

(6) $\alpha \Rightarrow \beta, \neg\beta \vdash \neg\alpha$ 4, 5 $\neg$-introd.

(7) $\alpha \Rightarrow \beta \vdash \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$ 6 10C

14C. *Comentariu.* Văzând acest șir de relații deductive, cititorul poate fi derutat în privința „strategiei” construirii sale.

Încercând să-l lămurim vom parcurge aceste relații de la ultima spre prima; începem cu cea de demonstrat:

$$\alpha \Rightarrow \beta \vdash \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha.$$

[1] Reamintim că implicația $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$ se numește *transpusa* implicației $\alpha \Rightarrow \beta$.

Trecând în revistă cele 14 reguli deductive vom constata că singurele ce au în dreapta simbolului $\vdash$ operatorul $\Rightarrow$, sunt $\Rightarrow$ - introd. şi $\Leftrightarrow$ - elim. Deoarece în ipoteza relaţiei de demonstrat nu figurează $\Leftrightarrow$ ne fixăm asupra $\Rightarrow$ - introd. În temeiul acestei reguli, relaţia de demonstrat se obţine din relaţia

$$\alpha \Rightarrow \beta, \urcorner\beta \vdash \urcorner\alpha$$[1].

În concluzia noii relaţii apare operatorul $\urcorner$, pentru a cărui introducere sunt necesare – prin regula $\urcorner$-introd. – două relaţii de forma

$$\alpha \Rightarrow \beta, \urcorner\beta, \alpha \vdash \gamma \quad \text{şi} \quad \alpha \Rightarrow \beta, \urcorner\beta, \alpha \vdash \urcorner\gamma.$$

Rămâne să găsim o formulă γ pentru care cele două relaţii să fie adevărate. Nu este greu de observat că o astfel de formulă este chiar β. Într-adevăr relaţiile

$$\alpha \Rightarrow \beta, \urcorner\beta, \alpha \vdash \beta \quad \text{şi} \quad \alpha \Rightarrow \beta, \urcorner\beta, \alpha \vdash \urcorner\beta$$

se obţin pe baza regulii de $\Rightarrow$ -eliminare şi a proprietăţii 5C.

Primele patru linii din demonstraţie nu sunt decât o cale de a face acest lucru (utilizând şi proprietatea 6C).

Iată, cu aceleaşi mijloace, demonstraţia principiului *tertium non datur* (terţul exclus).

$$\vdash \alpha \vee \urcorner\alpha$$

unde α este o formulă propoziţională.

(1)	$\alpha \vdash \alpha \vee \urcorner\alpha$	$\vee$ - introd.
(2)	$\urcorner(\alpha \vee \urcorner\alpha) \vdash \urcorner\alpha$	1 transp.
(3)	$\urcorner\alpha \vdash \alpha \vee \urcorner\alpha$	$\vee$-introd.
(4)	$\urcorner(\alpha \vee \urcorner\alpha) \vdash \urcorner\urcorner\alpha$	3 transp.
(5)	$\vdash \urcorner\urcorner(\alpha \vee \urcorner\alpha)$	2, 4 $\urcorner$-introd.

[1] Această relaţie deductivă corespunde unui principiu deductiv pe care primii logicieni, începând chiar cu Aristotel (384-322 înainte de Hristos) l-au remarcat, alături de *modus ponens*. El s-a numit *modus tollens*.

(6)	$\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \vdash \alpha \vee \neg\alpha$	DN-elim.
(7)	$\vdash \alpha \vee \neg\alpha$	5, 6 6C

§19. Completitudinea calculului propoziţional

Consistenţa calculului propoziţional este, conform 13C, condiţia de a nu putea demonstra toate formulele propoziţionale.

Completitudinea este condiţia de a putea demonstra toate formulele valide şi se mai numeşte de aceea *completitudine în raport cu validitatea.* Demonstrarea sa se bazează pe următoarea constatare:

15C. Fiecărei linii din cele cinci tabele de adevăr TAB $\neg$, TAB $\wedge$, TAB $\vee$, TAB $\Rightarrow$, TAB $\Leftrightarrow$ îi corespunde o relaţie de deducţie adevărată.

Vom exemplifica afirmaţia redând relaţiile de deductibilitate corespunzătoare celor două linii din TAB $\neg$:

p	$\neg p$	
A	F	$p \vdash \neg\neg p$
F	A	$\neg p \vdash \neg p$

şi celor patru linii din TAB $\wedge$

p	q	$p \wedge q$	
A	A	A	$p, q \vdash p \wedge q$
A	F	F	$p, \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$
F	A	F	$\neg p, q \vdash \neg(p \wedge q)$
F	F	F	$\neg p, \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

Iată, ca exemplu, deducţia corespunzătoare relaţiei de deductibilitate $p, \rceil q \vdash \rceil (p \wedge q)$:

$(1)\ p, \rceil q, p \wedge q \vdash \rceil q$ 5C

$(2)\ p, \rceil q, p \wedge q \vdash p \wedge q$ 5C

$(3)\ p \wedge q \vdash q$ $\wedge$-elim.

$(4)\ p, \rceil q, p \wedge q \vdash q$ 2, 3 6C

$(5)\ p, \rceil q \vdash \rceil (p \wedge q)$ 1, 4 $\rceil$-introd.

Se obţin astfel 18 relaţii de deductibilitate adevărate, corespunzătoare celor 18 linii din aceste 5 tabele.

Prin extensie, pentru fiecare formulă propoziţională se obţine – corespunzător fiecărei linii din tabela sa de adevăr – câte o relaţie de deductibilitatate.

Spre exemplu, pentru formula

$$p \wedge (p \Rightarrow q)$$

având tabela la pag. 14, corespunzător celor patru linii ale acesteia se pot obţine relaţiile de deductibilitate:

$$p, q \vdash p \wedge (p \Rightarrow q)$$

$$p, \rceil q \vdash \rceil (p \wedge (p \Rightarrow q))$$

$$\rceil p, q \vdash \rceil (p \wedge (p \Rightarrow q))$$

$$\rceil p, \rceil q \vdash \rceil (p \wedge (p \Rightarrow q))$$

Iată, de pildă, cum se obţine a doua dintre aceste deducţii:

$(1)\ p, \rceil q, p \wedge (p \Rightarrow q) \vdash \rceil q$ 5C

$(2)\ p \wedge (p \Rightarrow q) \vdash p$ $\wedge$ - elim.

$(3)\ p \wedge (p \Rightarrow q) \vdash p \Rightarrow q$ $\wedge$ - elim.

$(4)\ p, p \Rightarrow q \vdash q$ $\Rightarrow$ - elim.

$(5)\ p \wedge (p \Rightarrow q) \vdash q$ 2, 3, 4 6C

(6) $p, \rceil q, p \wedge (p \Rightarrow q) \vdash p \wedge (p \Rightarrow q)$ 5C

(7) $p, \rceil q, p \wedge (p \Rightarrow q) \vdash q$ 5,6 6C

$p, \rceil q \vdash \rceil (p \wedge (p \Rightarrow q))$ 1,7 $\rceil$-introd.

În cazul unei formule α propozițional valide și care conține doar variabilele propoziționale p și q, relațiile de deducție corespunzătoare celor patru linii din TAB α vor fi:

(1) $p, q \vdash \alpha$

(2) $p, \rceil q \vdash \alpha$

(3) $\rceil p, q \vdash \alpha$

(4) $\rceil p, \rceil q \vdash \alpha$,

din care deducem:

(5) $p, q \vee \rceil q \vdash \alpha$ 1, 2 $\vee$-elim.

(6) $\rceil p, q \vee \rceil q \vdash \alpha$ 3, 4 $\vee$-elim.

(7) $p \vee \rceil p, q \vee \rceil q \vdash \alpha$ 5, 6 $\vee$-elim.

În mod analog:

16C. Dacă α este o formulă propozițional validă conținând variabilele propoziționale $p_1, ..., p_n$, atunci are loc relația de deductibilitate:

$$p_1 \vee \rceil p_1, ..., p_n \vee \rceil p_n \vdash \alpha.$$

Observație. Drept caz particular al proprietății 6C (când $m = 0$) din

$$\vdash \beta_1, ..., \vdash \beta_p \text{ și } \beta_1, ..., \beta_p \vdash \gamma \text{ rezultă: } \vdash \gamma.$$

În virtutea demonstrației de la pag. 42

$$\vdash p_1 \vee \rceil p_1, ..., \vdash p_n \vee \rceil p_n.$$

Deci pentru orice formulă propozițional validă α, conf. 16C, rezultă:

$$\vdash \alpha.$$

[illegible] calculului propozițional. [illegible] formulă propozițională α, [illegible] implică $\vdash \alpha$. [illegible]

Exerciții (Soluții la pag. 88)

1. Urmăriți raționamentul următor:

Animalele îl iubesc *dacă* le hrănește *sau* (măcar) nu le lovește.

El le hrănește *și* (totuși) animalele *nu* îl iubesc.

Deci le lovește.

a) Utilizați următorul dicționar:

I : animalele îl iubesc,

H : le hrănește,

L : le lovește,

pentru a transcrie în limbaj simbolic cele trei propoziții ale rationa-mentului. Cuvintele-cheie – scrise cursiv – indică utilizarea câte unui operator logic. Determinați-l bazându-vă pe cele discutate în capitolul A.

b) Înlocuind fiecare dintre cele 3 propoziții simple *I, H* și *L* prin variabilele propoziționale *p, q* și *r*, scrieți formulele

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta$$

corespunzătoare celor trei propoziții ale raționamentului.

c) Verificați validitatea logică a raționamentului ca validitate propozițională a implicației

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta.$$

d) Arătați că formula $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ este inconsistentă. Ce rezultă de aici cu privire la validarea raționamentului când se înlocuiește concluzia sa („le lovește”) cu orice altă propoziție logică?

2. Se consideră raționamentul:

Dacă impozitele nu cresc, atunci se înregistrează un deficit bugetar.

Dacă se înregistrează un deficit bugetar, sumele alocate asistenței sociale scad.

Impozitele cresc.

Deci sumele alocate asistenţei sociale nu scad.

a) Determinaţi propoziţiile simple şi operatorii logici prin aplicarea cărora puteţi transcrie în limbaj propoziţional cele patru propoziţii ale raţionamentului.

b) Construiţi cele patru formule propoziţionale α_1, α_2, α_3, β corespunzătoare acestor patru propoziţii.

c) Verificaţi validitatea propoziţională a formulei

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \Rightarrow \beta.$$

Ce rezultă de aici cu privire la validitatea logică a raţionamentului în cauză?

3. Utilizând descompunerea în propoziţii simple şi notaţiile indicate în paranteze pentru acestea, stabiliţi validitatea propoziţională a următorului raţionament:

Dacă suspectul comitea jaful (S), atunci utiliza un plan (P) sau avea un complice în interior (C).

Dacă utiliza un plan, atunci fura valori importante (V).

Dacă avea un complice în interior, acesta ar fi fost descoperit (D).

Nu a furat valori importante şi nici un complice nu a fost descoperit.

Deci suspectul nu a comis jaful.

4. (după Keisler). Trei persoane X_1, X_2, X_3, bănuite de evaziune fiscală, declară fiecare sub prestare de jurământ:

X_1 : X_2 este vinovat şi X_3 este nevinovat;

X_2 : dacă X_1 este vinovat, atunci X_3 este vinovat;

X_3 : sunt nevinovat şi cel puţin unul dintre ceilalţi doi este vinovat.

a) Transcrieţi în limbaj propoziţional cele trei declaraţii utilizând dicţionarul

P_i : X_i este vinovat. ($i = 1, 2, 3$)

şi operatorii logici.

b) Construiți cele trei formule propoziționale α_1, α_2, α_3 corespunzătoare acestor declarații și verificați dacă ele sunt consistente, verificând consistența (necontradicția) formulei

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$$

(cf. 7B).

c) Pentru a verifica dacă declarația unuia dintre suspecți rezultă din declarația altuia, verificați care dintre cele șase formule

$$\alpha_i \Rightarrow \alpha_j \qquad (i \neq j)$$

este propozițional validă.

d) Dacă cele trei persoane sunt nevinovate, care dintre ele a depus mărturie falsă?

e) Presupunând că cei nevinovați au spus adevărul, iar cei vinovați au mințit puteți preciza cine sunt vinovați și cine nu?

5. Construiți deducțiile (cf. 9C) care să justifice următoarele relații de deductibilitate:

a) $p, q \vdash p \wedge q$ ($\wedge$ - introducere)

b) $p \wedge q \vdash p$ ($\wedge$ - eliminare)

c) $p \vdash p \vee q$ ($\vee$ - introducere)

d) $\neg\neg p \vdash p$ ($\neg\neg$ - eliminare)

e) $p, \neg p \vdash q$ ($\neg$ - eliminare)

II. CALCULUL PREDICATELOR

D. Idei introductive

§20. Insuficiențe ale calculului propozițional

În prima parte am studiat un instrument logic capabil de a justifica validitatea anumitor raționamente. Dar nu a tuturor acelora pentru care avem motive întemeiate să le considerăm drept corecte din punct de vedere formal.

Spre exemplu, când din propoziția

Toți peștii trăiesc în apă

deducem propoziția

Peștii răpitori trăiesc în apă,

o facem în virtutea unui principiu după care ceea ce este adevărat în toate cazurile, este adevărat și în cazuri speciale.

Formal însă, cele două propoziții sunt propoziții simple, adică nu pot fi obținute transformând alte propoziții prin intermediul celor cinci operatori logici. Simbolizându-le prin *P* și respectiv *Q*, structura logică a celor două afirmații este redată de formulele p și q, care sunt variabile propoziționale distincte. Relația de deductibilitate

$$p \vdash q$$

este echivalentă, în virtutea 7C și 9C, cu

$$\vdash p \Rightarrow q.$$

Ceea ce, conform 11C și 17C, echivalează cu

$$\models p \Rightarrow q.$$

Această condiţie nu este îndeplinită, deoarece formula $p \Rightarrow q$ nu este validă.

Ceea ce nu reprezintă un argument împotriva validităţii logice a deducţiei din exemplu, ci doar o dovadă că mijloacele calculului propoziţional sunt insuficiente pentru a o justifica.

Rămâne să vedem cum pot fi dezvoltate aceste mijloace pentru atingerea unui asemenea scop.

§21. Structura logică a propoziţiei simple

Tratate ca propoziţii simple, între P şi Q din exemplul anterior nu apare nici o legătură logică. Totuşi o astfel de legătură există şi va trebui pusă în evidenţă. Vom face de aceea o analiză logică a structurii unei astfel de propoziţii.

Analiza gramaticală o descompune în subiect, predicat, atribut, complement etc.

Analiza logică distinge doar două componente: *subiectul logic* şi *predicatul logic*.

De exemplu, propoziţia

Andrei este apreciat,

este alcătuită din subiectul logic „Andrei" şi predicatul logic „este apreciat".

Dar, dacă dorim ca acest predicat să poată fi aplicat şi altor subiecte logice, vom scrie

(1) x este apreciat

unde variabila x poate lua anumite valori, pentru fiecare dintre ele expresia (1) devenind o propoziţie logică. Este ceea ce în matematică reprezintă o funcţie; aici este vorba de o *funcţie propoziţională*.

Notaţia pe care o adoptăm este legată de notaţia unei funcţii matematice, anume

$$F(x)$$

care, în cazul funcției propoziționale (1) va fi

$$Ax.$$

Înlocuirea lui x prin subiectul logic „Andrei”, notat a, conduce la notarea propoziției date cu

Aa[1].

Să trecem la un alt exemplu:

Andrei este apreciat de Ileana.

Aici putem considera diverse predicate logice (funcții propoziționale):

x este apreciat de Ileana;
Andrei este apreciat de y;
x este apreciat de y.

Observăm că ultimul dintre ele este mai general deoarece permite obținerea primelor două prin înlocuirea uneia dintre variabilele x și y prin câte un subiect logic. Dacă îl vom nota cu

$$Axy$$

propoziția din exemplu va căpăta forma

$$Aai$$

(i reprezentând subiectul logic Ileana).

Continuăm seria exemplelor cu încă două propoziții

Andrei se autoapreciază;

(2) Andrei este apreciat de toți.

În primul caz putem considera un nou predicat „x se autoapreciază”, dar credem că este mai adecvată, în acest context, utilizarea predicatului Axy sub forma Aaa (Andrei este apreciat de Andrei).

---

[1] Notația aceasta inversează ordinea naturală: subiect-predicat. Este preferată deoarece poate fi mai comod generalizată la cazul predicatelor care acceptă mai multe subiecte, așa cum se va vedea în cele ce urmează.

Reuşim astfel să punem în evidenţă scheletul comun al propoziţiilor anterioare.

Vom discuta acum propoziţia (2).

§22. Cuantificarea subiectului logic

Considerând „toţi" ca subiect logic – să-l notăm t – putem utiliza acelaşi predicat Axy pentru a reprezenta (2) sub forma

$$Aat.$$

Realizăm astfel ceea ce se numeşte o formă în dezacord cu conţinutul! Căci „toţi" nu reprezintă în (2) un subiect (persoană sau colectiv de persoane) care îl apreciază pe Andrei, ci expresia sintetică a afirmaţiilor simultane:

Andrei este apreciat de Ileana, Andrei este apreciat de Andrei etc.

Cu alte cuvinte că pentru *fiecare* x (persoană), Andrei este apreciat de x.

Această idee – de *cuantificare* a subiectului logic x într-o funcţie propoziţională (aici Aax) – se exprimă simbolic prin aşezarea *cuantificatorului general* sau *universal* $\forall x$[1] în faţa acelei funcţii propoziţionale

$$\forall x\, Aax.$$

Expresia se citeşte

pentru toţi x: Andrei este apreciat de x.

Cuantificarea subiectului logic este una dintre cele mai fecunde idei pe care se bazează calculul predicatelor. Cu ajutorul ei putem exprima, utilizând predicatul Axy, şi prima dintre propoziţiile analizate

Andrei este apreciat.

Pentru aceasta vom apela însă la celălalt tip de cuantificare: *particulară* sau *existenţială*. Ea se exprimă simbolic punând în faţa predicatului Aax *cuantificatorul particular* sau *existenţial* $\exists x$

$$\exists x\, Aax.$$

---

[1] A răsturnat - ($\forall$) - este iniţiala cuvântului *all* = toţi (în l. engleză).

Expresia se citeşte

pentru unii x: Andrei este apreciat de x,

sau

există unii x pentru care: Andrei este apreciat de x.

Regăsim aici o formulare explicită a ceea ce, într-o formă eliptică, se găsea exprimat prin

Andrei este apreciat.

Observaţie. Reţinem condiţia *de existenţă* – a unor persoane care îl apreciază pe Andrei – conţinută în această formă de exprimare.

§23. Argumente exprimate în limbajul calculului predicatelor

Continuăm să transcriem în acest nou limbaj, judecăţi şi raţionamente din limbajul natural.

1D. Unii (oameni) sunt apreciaţi.
Unii sunt capabili.
Deci: unii sunt apreciaţi şi capabili.

Notând:

Ax : x este apreciat
Cx : x este capabil

obţinem, pe baza calculului propoziţional:

$Ax \wedge Cx$: x este apreciat şi (x este) capabil.

Astfel, transcrierea simbolică a argumentului alcătuit din cele trei afirmaţii este

$\exists x\, Ax, \exists x\, Cx \vdash \exists x\, (Ax \wedge Cx)$.

2D. *Observaţie* (*universul* sau *domeniul* discursului). Toţi cuantificatorii ($\forall$ şi $\exists$) ce apar într-o expresie simbolică, într-un

argument, sau chiar într-un şir de argumente corelate între ele, se referă întotdeauna la o aceeaşi colecţie de indivizi (persoane, obiecte etc.) precizată în fiecare caz în parte. Ea poartă numele de domeniu sau univers al discursului.

3D. O problemă importantă legată de transcrierea diverselor argumente este aceea a exprimării în limbaj simbolic a celor *patru tipuri de propoziţii* din logica clasică:

A: toţi *P* sunt *R* (universal afirmativă);

I: unii *P* sunt *R* (particular afirmativă);

E: nici un *P* nu este *R* (universal negativă);

O: unii *P* nu sunt *R* (particular negativă)[1].

Vom face această transcriere ţinând seama că *P* şi *R* sunt predicate cu un singur subiect logic

Px : x este P,
Rx : x este R.

Astfel, „toţi *P* sunt *R*" va fi interpretată sub forma condiţională „pentru orice *x*: dacă *x* este *P*, atunci *x* este *R*". Simbolic:

$$A : \forall x\,(Px \Rightarrow Rx).$$

Propoziţia „unii *P* sunt *R*", va fi interpretată drept „pentru unii *x*: *x* este *P* şi *x* este *R*" şi redată simbolic

$$I : \exists x\,(Px \land Rx).$$

Cele două propoziţii negative *E* şi *O* sunt interpretate în acelaşi mod, dar schimbând predicatul *Rx* cu negaţia sa $\rceil Rx$; astfel

$$E: \forall x\,(Px \Rightarrow \rceil Rx)$$
$$O: \exists x\,(Px \land \rceil Rx)$$

[1] *A* şi *I* sunt primele două vocale din *AFFIRMO*, iar *E* şi *O* sunt vocalele din *NEGO*.

Rămâne să vedem mai târziu în ce măsură aceste transcrieri sunt sau nu adecvate.

Revenind la exemplul de la pag. 50 să transcriem simbolic în acest mod cele două propoziții pe care le conține. Considerând predicatele

Px: x este peşte,
Ax: x trăieşte în apă,
Rx: x este răpitor,

vom transcrie prima propoziție sub forma

$$\forall x\,(Px \Rightarrow Ax),$$

iar pe a doua, sub forma

$$\forall x\,(Px \wedge Rx \Rightarrow Ax).$$

Relația de deductibilitate între cele două propoziții va fi, conform exemplului

4D. $\forall x\,(Px \Rightarrow Ax) \vdash \forall x\,(Px \wedge Rx \Rightarrow Ax)$.

E. Dezvoltarea calculului predicatelor

§24. Formule cu predicate

Sub acest nume includem formulele propoziționale, dar şi pe cele în care pot apare două noi tipuri de variabile:

variabile individuale (notate x, y, z, x_1 etc.),
variabile de predicat.

Acestea din urmă vor fi notate cu aceleaşi litere ca şi variabilele propoziționale (p, q, r, p_1 etc.) fiind însă urmate de una, două, trei etc. variabile individuale şi alcătuind aşa-numitele *formule atomice.*

Iată exemple de formule atomice

$$p,\ p(x),\ p(x, x),\ p(x, y),\ q(y, y) \text{ etc.}$$

1E. Formulele cu predicate se construiesc pas cu pas, similar cu cele propoziționale (conf. 3B) în baza a două reguli inductive.

R1. *Baza inducției.* Formulele atomice sunt formule cu predicate.

R2. *Pasul inducției.* a) Dacă α şi β sunt formule cu predicate, atunci

$$\rceil\alpha,\ \alpha \wedge \beta,\ \alpha \vee \beta,\ \alpha \Rightarrow \beta,\ \alpha \Leftrightarrow \beta$$

sunt formule cu predicate;

b) Dacă x este o variabilă individuală[1] şi α este o formulă cu predicate, atunci

$$\forall x\, \alpha \qquad \text{şi} \qquad \exists x\, \alpha$$

sunt formule cu predicate.

2E. Convenția 4B cu privire la paranteze rămâne valabilă fiind completată cu o clauză prin care cuantificatorii $\forall$ şi $\exists$ au aceeaşi prioritate ca şi $\rceil$.

Spre exemplu formula

$\exists x\, p(x) \wedge q(x)$ va însemna $(\exists x\, p(x)) \wedge q(x)$

[şi nu $\exists x\, (p(x) \wedge q(x))$].

3E. *Apariții libere şi legate ale unei variabile individuale.* Formula α din R2b se numeşte *domeniul* cuantificatorului $\forall x$, respectiv $\exists x$, şi fiecare dintre aparițiile lui x în α se numeşte *legată*[2].

---

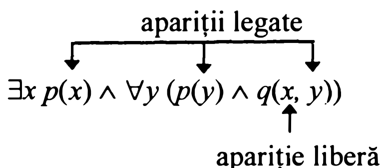
[1] x poate fi oricare din variabilele x, y, z etc.

[2] În terminologia generală a calculului, variabila este un simbol ce poate fi înlocuit cu valori dintr-o mulțime dată de valori. Este ceea ce corespunde aici noțiunii de variabilă liberă.

Dar în expresii ca $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sau $\int_0^1 \sin x dx$, variabilelor n şi x nu li se pot da valori, doarece expresiile desemnează valori fixate. Ele se numesc variabile *legate* sau *aparente*.

Orice apariție a unei variabile care nu este legată se numeşte apariție *liberă*.

Exemplu.



Fiecare apariție legată a unei variabile, se leagă de un anumit cuantificator. Astfel, în formula din exemplu, prima apariție legată (a lui x) se leagă de primul cuantificator, iar următoarele două apariții legate (ale lui y) se leagă de al doilea cuantificator.

§25. Validitate în calculul predicatelor

Interpretarea unei formule cu predicate.

Limbajul calculului cu predicate extinde pe cel propozițional, iar validitatea formulelor cu predicate extinde validitatea formulelor propoziționale.

Formulele propoziționale sunt alcătuite din variabile propoziționale şi operatori logici. O variabilă propozițională poate fi *interpretată* ca propoziție logică adevărată sau falsă. Interpretând astfel toate variabilele formulei propoziționale şi utilizând tabelele de adevăr ale operatorilor logici putem determina valoarea de adevăr a formulei pentru fiecare asemenea interpretare (cf. §8).

Pentru a interpreta o formulă ce conține variabile individuale şi de predicat, pornim de la o mulțime nevidă U numită *univers* al discursului (cf. 2D).

4E. *Exemplu.* $\alpha(x, y)$: $p(x) \vee (q\,(x, y) \Rightarrow \rceil p(x))$

Consider U alcătuit din două elemente (le notăm 1 şi 2). În acest U variabila de predicat $p(x)$ poate avea $2^2 = 4$ interpretări:

$p(x)$

x	I	II	III	IV
1	A	A	F	F
2	A	F	A	F

TAB $p(x)$

iar variabila de predicat $q(x, y)$ poate avea $2^4 = 16$ interpretări

$q(x, y)$

x	y	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
1	1	A	A	A	A	F	A	A	A	F	F	F	A	F	F	F	F
1	2	A	A	A	F	A	A	F	F	A	A	F	F	A	F	F	F
2	1	A	A	F	A	A	F	A	F	F	A	A	F	F	A	F	F
2	2	A	F	A	A	A	F	F	A	A	F	A	F	F	F	A	F

TAB $q(x, y)$

Fixând interpretări pentru variabilele libere x, y cât şi pentru variabilele de predicat $p(x)$ şi $q(x, y)$ vom putea determina, utilizând tabelele TAB $\Rightarrow$ şi TAB$\vee$, valoarea de adevăr a formulei date la fel ca în calculul propoziţional.

De pildă, pentru $x = 2$ şi $y = 1$, $p(x)$ având interpretarea II, iar $q(x, y)$ interpretarea X, găsim în tabele că $p(2)$ este F şi $q(2, 1)$ este A. Aşadar, formula

$$p(x) \vee (q(x, y) \Rightarrow \neg p(x)) \text{ devine F} \vee \text{A, adică A.}$$

Formula dată este *validă în U* sau *2-validă*[1], dacă în fiecare dintre cele 256 astfel de interpretări ea capătă valoarea *A*.

5E. *Observaţie.* Întrucât nu conţine cuantificatori şi variabile legate, validitatea (sau nevaliditatea) acestei formule poate fi

[1] Natura elementelor lui *U* nu va juca nici un rol în cele ce urmează. Ceea ce va conta este doar numărul acestor elemente.

verificată mult mai simplu: pe baza calculului propozițional. Anume, tratând fiecare formulă atomică distinctă ca o variabilă propozițională distinctă și alcătuind o tabelă corespunzătoare de adevăr. În cazul de față ea este

$p(x)$	$q(x, y)$	$q(x, y) \Rightarrow \rceil p(x)$	$p(x) \vee (q(x, y) \Rightarrow \rceil p(x))$
A	A	F	A
A	F	A	A
F	A	A	A
F	F	A	A

TAB $\alpha(x, y)$

și ne arată, prin numai două coloane de calcul, că oricum am alege valorile x, y în U și valorile corespunzătoare de adevăr pentru $p(x)$ și $q(x, y)$, formula este adevărată. Și aceasta nu numai când U are două elemente, ci un număr oricât de mare (chiar infinit !) de elemente.

Este ceea ce, în calculul cu predicate, vom numi formulă validă în orice univers (al discursului); într-o expresie – formulă *universal validă.*

Nu la fel stau lucrurile cu o formulă care conține cuantificatori. Căci pentru determinarea valorii sale de adevăr trebuie să ținem seama de interpretarea acestor cuantificatori.

6E. *Exemplu.* $\forall x\, p(x) \Rightarrow p(y)$

Astfel, de pildă, dacă $U = \{1, 2\}$, iar predicatul $p(x)$ capătă interpretarea I din TAB $p(x)$, formula $\forall x\, p(x)$ va fi A [deoarece atât $p(1)$ cât și $p(2)$ sunt A].

Pentru determinarea valorii de adevăr a formulei $p(y)$ fixăm o interpretare a variabilei individuale y în U, de exemplu $y = 1$. Întrucât $p(1)$ este A, în interpretarea aleasă formula din exemplu este $A \Rightarrow A$ deci A.

Pentru a constata însă că formula din 6E este universal validă vom pleca de la un univers nevid U având un număr finit sau nu de elemente. Nu mai putem tabela, ca mai sus,

interpretările predicatului $p(x)$. Nici nu ne-ar fi de folos. Vom împărți aceste interpretări în două categorii:

a) cele în care formula $\forall x\ p(x)$ este adevărată (cu alte cuvinte, în care $p(x)$ este adevărat oricare ar fi x în U) şi

b) cele în care formula $\forall x\ p(x)$ este falsă.

În prima situație, oricum am interpreta variabila individuală y în U, $p(y)$ este adevărat, deci formula 6E este adevărată.

În cazul b) formula 6E poate fi F $\Rightarrow$ A sau F $\Rightarrow$ F, după cum este interpretat y în U; dar în ambele cazuri 6E este, conform TAB$\Rightarrow$, adevărată.

7E. *Exemplu.* $p(y) \Rightarrow \exists x\ p(x)$

De data aceasta interpretările lui $p(x)$ în diversele universuri nevide U se vor împărți în

a) cele pentru care formula $\exists x\ p(x)$ este A şi

b) cele pentru care $\exists x\ p(x)$ este F.

Lăsăm cititorului plăcerea de a descifra, în fiecare dintre cele două cazuri, motivul pentru care formula 7E este adevărată.

Marcăm *validitatea universală* a unei formule cu predicate, aşezând în fața ei, ca şi în calculul propozițional, semnul $\models$.

Astfel, din cele discutate până acum

$\models p(x) \vee (q(x, y) \Rightarrow \neg p(x))$

$\models \forall x\ p(x) \Rightarrow p(y)$

$\models p(y) \Rightarrow \exists x\ p(x)$

8E. *Căutarea unui contraexemplu* pentru o formulă cu predicate. Un astfel de contraexemplu este alcătuit dintr-un univers nevid pe care sunt definite interpretări pentru fiecare din variabilele (libere şi de predicat) ce apar în formula respectivă. Condiția este ca în aceste interpretări formula să capete valoarea de adevăr F.

Când un astfel de contraexemplu există formula este nevalidă.

Vom căuta în continuare un *contraexemplu* pentru formula

$$\alpha: \exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x) \Rightarrow \exists x\, (p(x) \wedge q(x)).$$

Conform TAB⇒, interpretările celor două variabile de predicat $p(x)$ şi $q(x)$ trebuie alese astfel încât

a) $\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$ să fie A,

b) $\exists x\, (p(x) \wedge q(x))$ să fie F.

Conform TAB∧ prima condiţie se poate reformula astfel

a$'$) $\exists x\, p(x)$ să fie A şi $\exists x\, q(x)$ să fie A.

Fie U universul în care considerăm aceste interpretări.

Conform condiţiei a$'$ există în U elementele i şi j astfel încât $p(i)$ şi $q(j)$ să fie A.

Conform condiţiei b, pentru orice element x din U

$$p(x) \wedge q(x) \text{ este F.}$$

De aici rezultă că $i \neq j$, căci altfel $p(i) \wedge q(j)$ cu $i = j$ ar fi A, contrazicând b.

Alegând $U = \{1, 2\}$ şi interpretările în U ale celor două predicate după cum urmează:

x	$p(x)$	$q(x)$
1	A	F
2	F	A

constatăm îndeplinirea condiţiilor a$'$ şi b.

Contraexemplul astfel determinat probează nevaliditatea formulei α.

9E. *Observaţie.* Dacă U ar fi fost alcătuit dintr-un singur element, condiţia b n-ar fi putut fi îndeplinită. Aşadar într-un astfel de domeniu formula α este validă.

În concluzie α este 1-validă, dar nu este n-validă pentru $n > 1$.

10E. *Definiție.* O formulă cu predicate α conținând variabilele propoziționale distincte $p_1, ..., p_k$, variabilele de predicat distincte $q_1, ..., q_m$[1] și variabilele individuale libere $x_1, ..., x_n$ este (*universal*) *validă* dacă pentru orice univers nevid *U*, orice valori de adevăr acordate variabilelor $p_1, ..., p_k$ și orice interpretări în *U* ale variabilelor de predicat $q_1, ..., q_m$ și ale variabilelor sale libere $x_1, ..., x_n$, capătă valoarea de adevăr A.

Notație

$$\models \alpha.$$

11E. O formulă cu predicate a cărei negație este (universal) validă se numește *contradictorie* sau *inconsistentă*.

Exemplu. $\exists x\, (p(x) \wedge \neg p(x))$

O formulă cu predicate care nu este nici validă, nici inconsistentă se numește *contingentă*.

Acesta este cazul formulei α din 8E.

12E. Pentru nici o formulă cu predicate nu au loc simultan

$$\models \alpha \quad \text{și} \quad \models \neg \alpha.$$

Fixând valorile de adevăr pentru $p_1, \ldots, p_k$, un univers nevid U și interpretări în U pentru $q_1, \ldots, q_m$, și $x_1, \ldots, x_n$, conf. 10E, α și $\neg\alpha$ trebuie să capete aceeași valoare de adevăr: A. Ceea ce contrazice TAB $\neg$.

§26. Substituții în calculul predicatelor

Ca și în calculul propozițional suntem în căutarea acelor operații prin care din formule (universal) valide să obținem alte

[1] Fiecare dintre aceste variabile de predicat poate fi urmată de un număr oarecare de variabile individuale.

formule de acelaşi tip. Printre acestea se află substituţiile variabilelor ce apar în formule.

a) *Substituţia variabilelor propoziţionale* se face în modul descris în §9a, cu păstrarea proprietăţii de validitate.

b) *Substituţia variabilelor individuale libere* şi a celor *de predicat* este permisă numai în anumite condiţii pe care le vom preciza în continuare.

Pentru a face înţeleasă „mecanica" unei asemenea substituţii plecăm de la un

13E. *Exemplu.* În formula validă 6E

$$\forall x\, p(x) \Rightarrow p(y)$$

substituim formula atomică $p(x)$, pe rând, cu fiecare dintre formulele

a) $p(x, x)$ b) $\exists z\, p(x, z)$ c) $\exists y\, p(x, y)$

şi obţinem următoarele rezultate corespunzătoare:

a$'$) $\forall x\, p(x, x) \Rightarrow p(y, y)$;

b$'$) $\forall x\, \exists z\, p(x, z) \Rightarrow \exists z\, p(y, z)$;

c$'$) $\forall x\, \exists y\, p(x, y) \Rightarrow \exists y\, p(y, y)$.

Dar în timp ce formulele a$'$ şi b$'$ sunt, ca şi formula dată, valide, pentru formula c$'$ există următorul contraexemplu:

În universul $U = \{1, 2\}$ pentru variabila de predicat $p(x, y)$ se defineşte următoarea interpretare

x	y	$p(x, y)$
1	1	F
1	2	A
2	1	A
2	2	F

În această interpretare formula $\forall x\, \exists y\, p(x, y)$ capătă valoarea A, iar formula $\exists y\, p(y, y)$ – valoarea F (de ce?). Conform TAB$\Rightarrow$, formula c$'$ va fi falsă.

Cauza alterării validității formulei 6E prin substituția c se datorează unui viciu de formă. Anume, datorită coincidenței de notație (y) între variabila liberă din 6E şi variabila legată din formula c, în urma substituției, variabila liberă y din 6E devine variabilă legată în c'[1].

Pentru evitarea unor astfel de situații facem următoarele precizări:

14E. Variabila y este *substituibilă* variabilei x în formula $\beta(x)$ dacă nici o parte a lui $\beta(x)$ de forma $\forall y\ \gamma$ sau $\exists y\ \gamma$ nu conține apariții libere ale lui x.

Spre exemplu y este substituibil lui x în $\exists z\ p(x, z)$, dar nu este substituibil lui x în $\exists y\ p(x, y)$.

15E. Formula $\beta(x)$ este *substituibilă* formulei atomice $p(x)$ în α dacă la fiecare apariție ca $p(v)$[2] a lui $p(x)$ în α, variabila v este substituibilă variabilei x în $\beta(x)$.

De pildă, aparițiile lui $p(x)$ în formula 6E fiind $p(x)$ şi $p(y)$, $\exists z\ p(x, z)$ este substituibilă lui $p(x)$ în această formulă, deoarece x, şi respectiv y sunt substituibile lui x în $\exists z\ p(x, z)$.

Dar $\exists y\ p(x, y)$ nu este substituibilă lui $p(x)$ în 6E, deoarece y nu este substituibil lui x în $\exists y\ p(x, y)$.

În general:

16E. Formula $\beta(x_1, ..., x_n)$ este *substituibilă* formulei atomice $p(x_1, ..., x_n)$ în α dacă la fiecare apariție ca $p(v_1, ..., v_n)$[2] a lui $p(x_1,..., x_n)$ în α, variabilele $v_1,..., v_n$ sunt substituibile respectiv variabilelor $x_1, ..., x_n$ în $\beta(x_1, .., x_n)$.

[1] Fenomenul nu se produce în cazul b când variabila legată fiind notată diferit (z), variabila liberă y din 6E rămâne şi după substituție, liberă.

[2] $v, v_1, ..., v_n$ desemnează oricare dintre variabilele individuale x, y, z, x_1 etc.

Cu aceste precizări au loc următoarele extensii ale proprietăţii 9B la calculul predicatelor

17E. *Proprietăţi.* a) Fie $\alpha(x_1,\ldots,x_n)$ o formulă cu predicate şi $y_1,\ldots,y_n$[1] variabile substituibile variabilelor $x_1,\ldots,x_n$ în formula de mai sus.

În aceste condiţii din

$$\models \alpha(x_1,\ldots,x_n)$$

rezultă

$$\models \alpha(y_1,\ldots,y_n).$$

b) Fie $\beta_1(x_1,\ldots,x_{n1}),\ldots,\beta_k(x_1,\ldots,x_{nk})$ formule cu predicate substituibile formulelor atomice $p_1(x_1,\ldots,x_{n1}),\ldots,p_k(x_1,\ldots,x_{nk})$ în α. Fie α^* rezultatul acestei substituţii. În aceste condiţii din

$$\models \alpha$$

rezultă

$$\models \alpha^*.$$

Ca aplicaţie considerăm o formulă cu predicate $\beta(x)$ şi o variabilă individuală y substituibilă lui x în $\beta(x)$; notez $\beta(y)$ rezultatul acestei substituţii.

În baza proprietăţii 17Eb, din

$$\models \forall x\, p(x) \Rightarrow p(y) \quad \text{şi} \quad \models p(y) \Rightarrow \exists x\, p(x)$$

rezultă

18E. $\models \forall x\, \beta(x) \Rightarrow \beta(y)$ şi $\models \beta(y) \Rightarrow \exists x\, \beta(x)$.

§27. Echivalenţa formulelor cu predicate

La fel ca şi formulele propoziţionale, formulele cu predicate α şi β se numesc *echivalente* dacă

$$\models \alpha \Leftrightarrow \beta.$$

Utilizăm aceeaşi notaţie ca şi în calculul propoziţional

$$\alpha \sim \beta.$$

---

[1] Vezi nota 2 de la pag. 65.

În virtutea definiției 10E a validității (universale a) formulelor cu predicate și a tabelei TAB⇔ rezultă următoarea

19E. *Proprietate.* Relația

$$\alpha \sim \beta$$

are loc dacă în orice univers (nevid) *U* și orice interpretare în *U* a variabilelor individuale libere și de predicat ce apar în α și β, cele două formule capătă aceeași valoare de adevăr.

Exemplu (formule congruente). Două formule cu predicate sunt *congruente* dacă diferă numai prin notația variabilelor legate.

Astfel

$$\forall z\, p(x, z) \qquad \text{și} \qquad \forall y\, p(x, y)$$

sunt congruente.

Tot congruente sunt și formulele

$$\exists x\, p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \vee q(x, y)) \text{ și } \exists y\, p(y) \wedge \forall y\, (p(y) \vee q(x, y)),$$

dar nici una nu este congruentă cu formula

$$\exists x\, p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \vee q(y, y)).$$

Pentru a pune în evidență congruența sau incongruența dintre aceste formule marcăm doar pozițiile variabilelor legate precum și relația lor cu cuantificatorii care le leagă. Astfel

$$\exists - p(-) \wedge \forall - (p(-) \vee q(x, -))$$

este schema comună primelor două formule, iar

$$\exists - p(-) \wedge \forall - (p(-) \vee q(-, -))$$

este schema celei de a treia.

Formulele congruente au așadar *aceeași schemă.*

În virtutea proprietății 19E:

20E. Dacă α și β sunt congruente, atunci

$$\alpha \sim \beta.$$

Proprietatea 14B se extinde pentru formulele cu predicate astfel

21E. *Proprietatea de înlocuire a expresiilor echivalente*
Fie γ_α o formulă cu predicate în care apare, ca parte a sa[1], formula α. Notăm γ_β formula obținută prin înlocuirea lui α – în una sau mai multe dintre aparițiile sale – cu formula β.
În aceste condiții, dacă $\alpha \sim \beta$ rezultă $\gamma_\alpha \sim \gamma_\beta$.

La pagina 95 am dat o listă cu 23 de echivalențe ale unor formule cu predicate, notate $E_{28}, \ldots, E_{50}$.

Aplicație: forma *prenexă* a unei formule cu predicate.

22E. *Proprietate.* Pentru fiecare formulă cu predicate γ există formula γ_{pr} astfel încât toți cuantificatorii ce apar în γ_{pr} să se afle în fața tuturor celor cinci operatori logici propoziționali ce apar în γ. În plus

$$\gamma \sim \gamma_{pr}$$

Această proprietate este dedusă în urma aplicării unui proces prin care cuantificatorii ce apar în γ sunt, treptat, trecuți în fața celor cinci operatori propoziționali. Iată cum decurge el în cazul formulei

$$\gamma\text{: } \exists x\, p(x) \Rightarrow \urcorner \exists x\, q(x, y).$$

1. Pe baza echivalenței E_{33} rezultă:

$$\urcorner \exists x\, q(x, y) \sim \forall x \urcorner q(x, y),$$

[1] Formula α este alcătuită din simboluri consecutive ale formulei γ_α.

apoi a proprietății 21E:

$$\gamma \sim \exists x\, p(x) \Rightarrow \forall x \rceil q(x, y).$$

2. Conform E_{30}:

$$\forall x \rceil q(x, y) \sim \forall z \rceil q(z, y),$$

apoi, conform proprietății 21E:

$$\gamma \sim \exists x\, p(x) \Rightarrow \forall z \rceil q(z, y)$$

3. Conform E_{43}:

$$\gamma \sim \forall x\, (p(x) \Rightarrow \forall z \rceil q(z, y))$$

4. Conform E_{40}:

$$p(x) \Rightarrow \forall z \rceil q(z, y) \sim \forall z\, (p(x) \Rightarrow \rceil q(z, y)),$$

apoi, conform proprietății 21E:

$$\gamma \sim \forall x\, (p(x) \Rightarrow \forall z \rceil q(z, y)) \sim \forall x\, \forall z\, (p(x) \Rightarrow \rceil q(z, y)).$$

Aşadar, am găsit că una dintre formele prenexe γ_{pr} ale formulei γ este formula

$$\forall x\, \forall z\, (p(x) \Rightarrow \rceil q(z, y)).$$

Observații. Ea nu este unică. Spre exemplu – conform E_{49} – o altă formă prenexă pentru γ este

$$\forall z\, \forall x\, (p(x) \Rightarrow \rceil q(z, y)).$$

§28. Dualizarea formulelor cu predicate

Simetria proprietăților operatorilor propoziționali $\wedge$ şi $\vee$ este completată, în calculul predicatelor, de o simetrie a proprietăților cuantificatorilor $\forall$ şi $\exists$.

Între $\wedge$ şi $\forall$, respectiv $\vee$ şi $\exists$ există, de altfel, o legătură strânsă.

Astfel, afirmația „oricare x are proprietatea α”, simbolizată

$$\forall x\, \alpha(x)$$

capătă, în universul cu n elemente $U = \{1, 2, \ldots, n\}$, forma conjuncției logice

$$\alpha(1) \wedge \alpha(2) \wedge \ldots \wedge \alpha(n)$$[1].

Afirmația „unii x au proprietatea α", simbolizată

$$\exists x\, \alpha(x)$$

capătă, în acelaşi univers, forma disjuncției

$$\alpha(1) \vee \alpha(2) \vee \ldots \vee \alpha(n).$$

Pe baza legilor De Morgan, pe de o parte

$$\neg(\alpha(1) \wedge \alpha(2) \wedge \ldots \wedge \alpha(n)) \sim \neg\alpha(1) \vee \neg\alpha(2) \vee \ldots \vee \neg\alpha(n),$$

iar pe de altă parte

$$\neg(\alpha(1) \vee \alpha(2) \vee \ldots \vee \alpha(n)) \sim \neg\alpha(1) \wedge \neg\alpha(2) \wedge \ldots \wedge \neg\alpha(n).$$

Ceea ce corespunde echivalențelor:

E_{32}. $\neg \forall x\, \alpha(x) \sim \exists x \neg\alpha(x)$

E_{33}. $\neg\exists x\, \alpha(x) \sim \forall x \neg\alpha(x)$

Proprietatea 16B se extinde la cazul unei formule cu predicate, α, astfel

23E. *Proprietate.* Presupunem că α conține doar formule atomice simple sau negate, operatorii $\wedge$ şi $\vee$ precum şi cuantificatori.

$\overline{\alpha}$ se obține din α negând formulele atomice simple, suprimând negația celor negate, înlocuind $\wedge$ cu $\vee$, $\vee$ cu $\wedge$ precum şi $\forall$ cu $\exists$, $\exists$ cu $\forall$.

Atunci: $\neg\alpha \sim \overline{\alpha}$.

Exemplu. $\alpha : \forall x\ \exists y (\neg p(y) \wedge \exists z\, q(x, z))$.

---

[1] Parantezele, necesare într-o conjuncție sau disjuncție cu mai mult de doi termeni, pot fi omise în baza legilor asociativității (E_{22} şi E_{23}).

Utilizând echivalențele propoziționale E_{32} și E_{33}, obținem pe rând

$$\neg\alpha \underset{E_{32}}{\sim} \exists x \neg\exists y (\neg p(y) \wedge \exists z\, q(x, z)) \underset{E_{33}}{\sim} \exists x \; \forall y \neg(\ldots) \underset{E_8}{\sim}$$

$$\sim \exists x \forall y (\neg\neg p(y) \vee \neg\exists z\, q(x, z)) \underset{DN, E_{33}}{\sim} \exists x \forall y (p(y) \vee \forall z \neg q(x, z)).$$

Formula obținută în finalul acestor transformări este $\overline{\alpha}$.

24E. α este o formulă cu predicate având structura descrisă în 23E.
Se numește *duala* lui α și se notează α', formula obținută înlocuind în α: $\wedge$ cu $\vee$, $\vee$ cu $\wedge$, $\forall$ cu $\exists$ și $\exists$ cu $\forall$.

Enunțăm proprietatea care extinde 17B la formulele cu predicate.

25E. *Proprietate.* α și β sunt formule cu predicate având structura descrisă în 23E.
Dacă $\alpha \sim \beta$, atunci $\alpha' \sim \beta'$.
Reciproc: dacă $\alpha' \sim \beta'$, atunci $\alpha \sim \beta$.

Exemplu. Echivalența

E_{46}. $\forall x\, \alpha(x) \wedge \forall x\, \beta(x) \sim \forall x\, (\alpha(x) \wedge \beta(x))$

se transformă prin dualizare în echivalența

E_{47}. $\exists x\, \alpha(x) \vee \exists x\, \beta(x) \sim \exists x\, (\alpha(x) \vee \beta(x))$.

§29. Reguli de cuantificare

Putem obține, plecând de la formule valide, alte formule valide pe o cale ce nu are corespondent în calculul propozițional: regulile de cuantificare.

Menționăm două astfel de reguli.

26E. *Regula* $\forall$. α şi $\beta(x)$ sunt formule cu predicate astfel încât variabila x nu apare liberă în α. Atunci, din

$$\models \alpha \Rightarrow \beta(x)$$

rezultă

$$\models \alpha \Rightarrow \forall x\, \beta(x).$$

27E. *Regula* $\exists$. $\alpha(x)$ şi β sunt formule cu predicate astfel încât variabila x nu apare liberă în β. Atunci, din

$$\models \alpha(x) \Rightarrow \beta$$

rezultă

$$\models \exists x\, \alpha(x) \Rightarrow \beta.$$

Verificăm regula $\forall$. Presupunem că

$$(1) \quad \models \alpha \Rightarrow \beta(x)$$

Fixăm un univers nevid U şi alegem interpretări pentru fiecare dintre variabilele (propoziţionale, de predicat şi individuale libere) ce apar în formulele α şi $\forall x\, \beta(x)$.

Întrucât x nu apare liberă în α, prin ipoteză, dar nici în $\forall x\, \beta(x)$, conform 3E, acestei variabile nu i-a fost acordată, prin alegerile menţionate, nici o interpretare.

După valoarea de adevăr pe care o ia formula α – în interpretările alese – distingem două cazuri:

a) α ia valoarea F;

b) α ia valoarea A.

În primul caz formula $\alpha \Rightarrow \forall x\, \beta(x)$ este, conform TAB$\Rightarrow$, adevărată.

În cazul b, alegând ca interpretare pentru variabila liberă x, din $\beta(x)$, pe rând *fiecare* element i din U, valoarea de adevăr a lui α nu se modifică (deoarece α nu conţine această variabilă liberă).

Întrucât $\alpha \Rightarrow \beta(x)$ este validă, (conform (1)), $\alpha \Rightarrow \beta(i)$ este adevărată.

α fiind adevărată, $\beta(i)$ va fi adevărată (TAB$\Rightarrow$).

Aşadar, în acest caz, $\forall x\ \beta(x)$ va căpăta – în interpretările alese – valoarea A; la fel ca şi formula

$$\alpha \Rightarrow \forall x\ \beta(x)$$

Verificarea regulii $\exists$ se face utilizând aceleaşi principii.

Presupunem

$$(2) \qquad \models \alpha(x) \Rightarrow \beta$$

şi alegem universul nevid U şi interpretări ale variabilelor propoziţionale, de predicat şi individuale libere ce apar în formulele $\exists x\ \alpha(x)$ şi β. Variabilei individuale x, care nu apare liberă în nici una dintre cele două formule, nu i se fixează acum nici o interpretare.

a) Când β este, în aceste interpretări, A, formula $\exists x\ \alpha(x) \Rightarrow \beta$ va fi A.

b) Când β este F, alegând ca interpretare pentru x, pe rând, *fiecare* element i din U, conform (2) şi TAB$\Rightarrow$, găsim pentru $\alpha(i)$ valoarea F.

Aşadar, în acest caz, $\exists x\ \alpha(x)$ va lua – în interpretările alese în U – valoarea F, iar formula

$$\exists x\ \alpha(x) \Rightarrow \beta$$

va fi devărată.

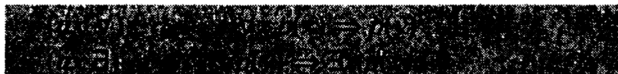
Observaţie. Există, pe lângă acestea două, şi alte reguli de cuantificare a variabilelor libere într-o formulă validă, cu păstrarea validităţii. Dar vom vedea în capitolul următor că ele pot fi obţinute, pe cale deductivă, din cele de mai sus.

F. Axiomatizarea calculului predicatelor

§30. Axiome şi reguli deductive

Calculul predicatelor este o dezvoltare a calculului propoziţional.

a) *Axiome.* Cele 13 axiome ale calculului propoziţional (§14a) sunt axiome şi pentru calculul predicatelor. Lor li se adaugă încă două axiome:



b) *Reguli deductive.*

b1) *Detaşarea* numită şi ⇒-eliminare este regula prin care, din formulele cu predicate α şi $\alpha \Rightarrow \beta$ deducem formula (cu predicate) β.

Ea se notează, pe scurt, *D.*

b2) *Regula substituţiei,* notată *S*, se referă la cele 13 axiome propoziţionale şi respectiv la cele două noi axiome: *ax* ∀ şi *ax* ∃.

Pe baza ei, din axiomele *ax* 1a, ..., *ax* 9b deducem rezultatul substituţiei[1] uneia sau mai multor variabile propoziţionale prin formule cu predicate.

Totodată regula *S* ne permite deducerea din *ax* ∀ a formulelor

$$\forall x\ \beta(x) \Rightarrow \beta(y),$$

şi din *ax* ∃ a formulelor

$$\beta(y) \Rightarrow \exists x\ \beta(x),$$

în condiţiile în care $\beta(x)$ este orice formulă cu predicate, y este o variabilă individuală substituibilă lui x în $\beta(x)$[2], iar $\beta(y)$ este rezultatul acestei substituţii.

b3) *Regulile de cuantificare*

Regula ∀ ne permite să deducem din orice formulă cu predicate

$$\alpha \Rightarrow \beta(x),$$

unde variabila x nu apare liberă în α, formula

$$\alpha \Rightarrow \forall x\ \beta(x).$$

Regula ∃ ne permite să deducem din formula cu predicate

[1] Substituţia trebuie să se facă, conform 10B, *uniform* sau peste tot unde apar acele variabile propoziţionale.

[2] Cf. 14E.

$$\alpha(x) \Rightarrow \beta,$$

unde variabila x nu apare liberă în β, formula

$$\exists x\, \alpha(x) \Rightarrow \beta.$$

§31. Demonstrație și deducție în calculul predicatelor

1F. *Definiție.* Se numește *demonstrație* în calculul cu predicate un șir finit alcătuit din formule cu predicate, fiecare dintre ele reprezentând:

a) fie una dintre cele 15 axiome sau rezultatul unei substituții într-o axiomă[1];

b) fie rezultatul aplicării regulii D unei perechi de formule anterioare ei în șir;

c) fie rezultatul aplicării regulii $\forall$ sau regulii $\exists$ unei formule anterioare ei în șir.

Formula finală a unei demonstrații se numește *teoremă*.

2F. *Exemplu.* Următoarele 7 formule cu predicate alcătuiesc o demonstrație. Menționăm, în dreptul fiecăreia, motivul includerii sale în șir (conform definiției anterioare).

(1) $p(y) \Rightarrow \exists x\, p(x)$ — $ax\ \exists$

(2) $(p(y) \Rightarrow \exists x\, p(x)) \Rightarrow (\forall x\, p(x) \Rightarrow (p(y) \Rightarrow \exists x\, p(x)))$ — ax 1a[2]

(3) $\forall x\, p(x) \Rightarrow (p(y) \Rightarrow \exists x\, p(x))$ — 1, 2 D

(4) $\forall x\, p(x) \Rightarrow p(y)$ — $ax\ \forall$

(5) $(\forall x\, p(x) \Rightarrow p(y)) \Rightarrow ((\forall x\, p(x) \Rightarrow (p(y) \Rightarrow \exists x\, p(x))) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall x\, p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)))$ — ax 1b

---

[1] Conf. regulii deductive S.

[2] În demonstrațiile și deducțiile din calculul cu predicate nu vom mai menționa explicit utilizarea regulii de substituție. Presupunem că cititorul – pe baza experienței deja acumulate – va sesiza aceasta.

(6) $(\forall x\, p(x) \Rightarrow (p(y) \Rightarrow \exists x\, p(x))) \Rightarrow (\forall x\, p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x))$ 4,5 D

(7) $\forall x\, p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$ 3,6 D

3F. *Definiție.* Se numește *deducție* în calculul cu predicate, din formulele (cu predicate) $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – numite *ipoteze* – un șir finit de formule cu predicate, fiecare dintre ele reprezentând

a) fie una dintre cele 15 axiome sau rezultatul unei substituții într-o axiomă;
b) fie o ipoteză;
c) fie rezultatul aplicării regulii D unei perechi de formule anterioare ei în șir;
d) fie rezultatul aplicării regulii $\forall$ sau regulii $\exists$ unei formule anterioare ei în șir.

Formula finală a unei deducții – β – se numește *concluzia* deducției, iar relația între ipoteze și concluzia deducției se notează

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \vdash \beta.$$

4F. *Exemplu.* Următorul șir de formule este o deducție a formulei $p \Rightarrow \forall x\, q(x)$ din ipoteza $\forall y\, (p \Rightarrow q(y))$.

(1) $\forall y\, q(y) \Rightarrow q(x)$ *ax* $\forall$

(2) $\forall y\, q(y) \Rightarrow \forall x\, q(x)$ 1, reg $\forall$

(3) $\forall y\, (p \Rightarrow q(y))$ ipoteză

(4) $\forall y\, (p \Rightarrow q(y)) \Rightarrow (p \Rightarrow q(y))$ *ax* $\forall$

(5) $p \Rightarrow q(y)$ 3,4 D

(6) $p \Rightarrow \forall y\, q(y)$ 5, reg $\forall$

(7) $(\forall y\, q(y) \Rightarrow \forall x\, q(x)) \Rightarrow (p \Rightarrow (\forall y\, q(y) \Rightarrow \forall x\, q(x))$ *ax* 1a

(8) $p \Rightarrow (\forall y\, q(y) \Rightarrow \forall x\, q(x))$ 2,7 D

(9) $(p \Rightarrow \forall y\, q(y)) \Rightarrow ((p \Rightarrow (\forall y\, q(y) \Rightarrow \forall x\, q(x))) \Rightarrow$
$\Rightarrow (p \Rightarrow \forall x\, q(x)))$ *ax* 1b

(10) $(p \Rightarrow (\forall y\, q(y) \Rightarrow \forall x\, q(x))) \Rightarrow (p \Rightarrow \forall x\, q(x))$ 6, 9 D

(11) $p \Rightarrow \forall x\, q(x)$ 8, 10 D

Aşadar, vom putea scrie:

$$\forall y\, (p \Rightarrow q(y)) \vdash p \Rightarrow \forall x\, q(x).$$

Relația $\vdash$ din definiția 3F se numeşte *relație de deductibilitate* în calculul cu predicate.

§32. Proprietăți ale relației de deductibilitate

Deşi notate la fel, relația de deductibilitate din calculul propozițional (cf. 3C) şi cea din calculul cu predicate sunt diferite. O parte dintre proprietățile celei dintâi rămân adevărate şi pentru cea de-a doua, iar altele se modifică în sens restrictiv.

Vom observa astfel că dacă $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, β sunt formule cu predicate pentru care

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \vdash \beta$$

are loc în calculul propozițional (adică în virtutea definiției 3C), atunci ea are loc şi în calculul cu predicate.

În schimb proprietatea:

dacă $\alpha \vdash \beta$, atunci $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$,

valabilă pentru deductibilitatea în calcul propozițional (cf. 9C), nu mai este valabilă şi în calculul predicatelor. Iată în acest sens un

Exemplu. Incluzând în deducția anterioară formula 5 ca ipoteză, putem renunța la formulele 3 şi 4, pe care se bazează deducția lui 5. Astfel încât cele 9 formule rămase constituie o deducție în calculul predicatelor. În virtutea acestei deducții are loc relația

$$p \Rightarrow q(y) \vdash p \Rightarrow \forall x\, q(x).$$

Dar formula

$$(1)\ (p \Rightarrow q(y)) \Rightarrow (p \Rightarrow \forall x\, q(x))$$

este nevalidă.

Întrucât – aşa cum vom arăta (§33) – orice teoremă din calculul predicatelor este o formulă validă, rezultă că relaţia

$$\vdash (p \Rightarrow q\,(y)) \Rightarrow (p \Rightarrow \forall x\, q(x))$$

nu are loc.

Nevaliditatea formulei (1) se poate proba astfel: alegem pentru p valoarea de adevăr A, iar în universul

$$U = \{1, 2\}$$

predicatul $q(x)$ să aibă interpretarea

x	$q(x)$
1	A
2	F

şi variabila individuală $y = 1$.

Defecţiunea apărută se datorează exclusiv cuantificării – prin cele două reguli: $\forall$ şi $\exists$ – unor variabile individuale ce apar libere în ipotezele deducţiei.

Astfel, în exemplul anterior variabila liberă y din formula-ipoteză $p \Rightarrow q(y)$ este cuantificată universal (în baza regulii $\forall$) pe parcursul deducţiei.

Când însă aceeaşi formulă apare nu ca ipoteză, ci dedusă din ipoteză (în deducţia din exemplul 4F), deci *regula de cuantificare nu se mai aplică unei variabile libere dintr-o ipoteză*, atunci toate proprietăţile 5C-10C rămân adevărate pentru această nouă relaţie de deductibilitate.

5F. *Convenţie.* În cele ce urmează vom considera ca relaţie de deductibilitate în calculul predicatelor, relaţia (notată $\vdash$) existentă între formulele cu predicate $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ şi formula cu predicate β atunci când există o deducţie a lui β din ipotezele $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (conf. 3F) în care regulile de cuantificare $\forall$ şi $\exists$ nu se aplică unor variabile libere din formulele-ipoteze.

§33. Consistență și completitudine

Axiomele calculului predicatelor sunt formule valide (primele 13 sunt propozițional valide, iar ax ∀ și ax ∃ sunt – conf. 6E și 7E – universal valide).

Orice teoremă a calculului predicatelor se obține din (unele dintre) aceste axiome prin mai multe transformări succesive constituind demonstrația sa. În baza definiției 1F, aceste transformări pot fi

a) substituții (cf. regulii deductive *S*),

b) detașări (cf. regulii deductive *D*),

c) aplicări ale regulilor ∀ sau ∃.

Fiecare dintre aceste transformări păstrează proprietatea de validitate (universală) pe care o au formulele de la care pleacă:

a) Substituțiile făcute în primele 13 axiome conduc la formule universal valide. Ne oprim un moment asupra acestei proprietăți.

Când într-o formulă propozițional validă substituim o variabilă propozițională printr-o formulă propozițională, validitatea formulei astfel obținute se bazează pe faptul că tabela sa de adevăr este dedusă din tabela de adevăr a formulei în care s-a făcut substituția (§ 9a).

Același fapt are loc și atunci când variabila propozițională este substituită printr-o formulă cu predicate.

Exemplu. Substituind în formula propozițional validă

$$(1) \qquad p \vee \rceil p$$

variabila propozițională p cu formula cu predicate
$\exists x\,(p(x) \wedge q(x, y))$ obținem

$$(2) \qquad \exists x\,(p(x) \wedge q(x, y)) \vee \rceil \exists x\,(p(x) \wedge q(x, y))$$

Validitatea universală a formulei (2) decurge din validitatea propozițională a formulei (1) astfel:

în orice univers (nevid) U și orice interpretare în U a variabilelor de predicat $p(x)$, $q(x, y)$ și a variabilei (individuale)

libere y, formula $\exists x\ (p(x) \wedge q(x, y))$ ia valoarea A sau F; odată determinată, această valoare de adevăr este introdusă în tabela de adevăr a formulei (1); ceea ce ne conduce – conform TAB $p \vee \urcorner p$ – la valoarea A (pentru (2)).

Substituţiile făcute în *ax* $\forall$ şi *ax* $\exists$ ne conduc la formule de tipul

$$\forall x\ \beta(x) \Rightarrow \beta(y),$$

respectiv

$$\beta(y) \Rightarrow \exists x\ \beta(x),$$

care sunt universal valide (18E).

b) Detaşarea: dacă formulele cu predicate α şi $\alpha \Rightarrow \beta$ sunt universal valide, atunci formula β este şi ea universal validă.

Acest fapt decurge direct din TAB$\Rightarrow$: când într-o anumită interpretare a variabilelor ce apar în α şi $\alpha \Rightarrow \beta$ (deci şi în β), acestea iau valoarea A, β capătă aceeaşi valoare de adevăr.

c) Conform 26E şi 27E, dacă premiza regulii ($\forall$ sau $\exists$) este universal validă, atunci concluzia sa are aceeaşi proprietate.

În final aşadar

6F. Pentru orice formulă cu predicate α, dacă $\vdash \alpha$ (i.e. α este o teoremă a calculului predicatelor), atunci $\models \alpha$ (i. e. α este universal validă).

Deoarece, cf. 12E, pentru nici o formulă cu predicate α:

$$\models \alpha \quad \text{şi} \quad \models \urcorner\alpha,$$

rezultă:

7F. *Consistenţa (sau necontradicţia) calculului predicatelor.* Pentru orice formulă cu predicate α, afirmaţiile

$$\vdash \alpha \quad \text{şi} \quad \vdash \urcorner\alpha$$

nu pot fi simultan adevărate.

Reciproca proprietății 6F este un rezultat fundamental al logicii predicatelor[1].

8F. *Completitudinea calculului predicatelor.*
Pentru orice formulă cu predicate α, dacă $\models \alpha$, atunci $\vdash \alpha$.

Demonstrația completitudinii calculului predicatelor nu are caracterul elementar al celei din calculul propozițional (§19) și de aceea nu o expunem aici.

Reîntorcându-ne la rezultatul în sine, 6F și 7F stabilesc echivalența, pentru orice formulă cu predicate α, a condițiilor

$$\models \alpha \quad \text{și} \quad \vdash \alpha.$$

Când α este o formulă propozițională, prima condiție poate fi verificată printr-o metodă care, chiar dacă este laborioasă, conduce, după un număr finit de operații[2] la răspunsul definitiv.

Când însă α este o formulă cu predicate, verificarea condiției

$$\models \alpha$$

presupune determinarea valorii de adevăr a lui α într-o infinitate de interpretări posibile ale variabilelor, libere și de predicat, ce le conține. Aceasta deoarece interpretările trebuie făcute în fiecare univers nevid *U*. Verificarea nu se încheie practic niciodată, astfel încât noi nu ne aflăm în situația de a putea da un răspuns definitiv chestiunii propuse. Problema în cauză face parte din clasa problemelor nedecidabile[3].

---

[1] Demonstrat de logicianul austriac K. Gödel în 1930 („Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls" în Monatschefte fur Mathematik und Physik, vol. 37, pp. 349-360).

[2] Este vorba de alcătuirea unei tabele de adevăr.

[3] Problema nu este nedecidabilă în cazul fiecărei formule cu predicate. Am determinat, de altfel, pe parcursul acestui capitol, validitatea sau nevaliditatea mai multor formule cu predicate. Ea este nedecidabilă în sensul imposibilității găsirii unui mecanism (algoritm) prin care, pentru *fiecare* formulă cu predicate α să putem – aplicând acest algoritm – să decidem, după un număr cunoscut de operații, dacă α este universal validă sau nu.

Ţinând seama de aceste dificultăţi, în loc de a verifica validitatea (universală a) unei formule cu predicate, este de preferat a încerca să descoperim o demonstraţie a formulei respective.

§34. Reguli deductive derivate

Sistematizarea şi simplificarea demonstraţiilor în calculul predicatelor se face, ca şi în cel propoziţional, prin înlocuirea axiomelor cu reguli deductive (derivate din acestea).

Alături de cele 13 reguli de introducere şi eliminare a fiecăruia dintre cei 5 operatori propoziţionali, mai apar astfel 4 reguli de introducere şi eliminare a celor doi cuantificatori.

Astfel

∀-introducere

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha(x)}{\Gamma \vdash \forall x \alpha(x)}$$

unde Γ reprezintă o listă, posibil vidă, de formule cu predicate în care variabila x nu apare lieră.

∀-eliminare

$$\forall x\, \alpha(x) \vdash \alpha(v)$$

unde v desemnează o variabilă individuală substituibilă lui x în $\alpha(x)$ (cf. 14E), iar $\alpha(v)$ rezultatul acestei substituţii.

∃-introducere

$$\alpha(v) \vdash \exists x\, \alpha(x)$$

unde v are aceeaşi semnificaţie ca în regula de ∀-eliminare.

∃-eliminare

$$\frac{\Gamma,\ \alpha(x) \vdash \beta}{\Gamma,\ \exists x \alpha(x) \vdash \beta}$$

unde β este o formulă cu predicate ce nu conţine variabila liberă x, iar Γ are aceeaşi semnificaţie ca în regula de ∀-introducere.

Ele sunt proprietăți ale relației de deductibilitate din calculul predicatelor și se pot demonstra ca atare. Aceste reguli se utilizează în demonstrații, împreună cu celelalte 13 din §18 și cu proprietățile 5C-10C (§16).

Exemplu. Reluăm relația de deductibilitate 4D (pag. 56) [în care constantele de predicate *Px, Rx* și *Ax* au fost înlocuite cu variabilele de predicate $p(x)$, $r(x)$ și $a(x)$]:

$$\forall x\,(p(x) \Rightarrow a(x)) \vdash \forall x\,(p(x) \wedge r(x) \Rightarrow a(x))$$

(1)	$\forall x\,(p(x) \Rightarrow a(x)) \vdash p(x) \Rightarrow a(x)$	$\forall$-elimin.
(2)	$p(x) \wedge r(x) \vdash p(x)$	$\wedge$-elimin.
(3)	$p(x), p(x) \Rightarrow a(x) \vdash a(x)$	$\Rightarrow$-elimin.
(4)	$\forall x\,(p(x) \Rightarrow a(x)), p(x) \wedge r(x) \vdash a(x)$	1, 2, 3 C[1]
(5)	$\forall x\,(p(x) \Rightarrow a(x)) \vdash p(x) \wedge r(x) \Rightarrow a(x)$	4, $\Rightarrow$-introd.
	$\forall x\,(p(x) \Rightarrow a(x)) \vdash \forall x\,(p(x) \wedge r(x) \Rightarrow a(x))$	$\forall$-introd.

Această deducție reprezintă justificarea formală a deducției din §20, făcută în temeiul legilor logice ale calculului cu predicate.

Exemplu.

$$\forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)), \forall x\,(q(x) \Rightarrow r(x)) \vdash \forall x\,(p(x) \Rightarrow r(x)).$$

Această deducție poartă, în tratatele de logică, numele de silogism în figura întâia (modul AAA). El este alcătuit din două ipoteze (premize) universal afirmative, care se pot exprima neformal astfel:

toți *P* sunt *Q*
toți *Q* sunt *R*.

De aici rezultă concluzia, de asemenea universal afimativă,

toți *P* sunt *R*.

Să arătăm validitatea sa (universală) producând o demonstrație a relației de deductibilitate prin care se exprimă simbolic.

---

[1] Prin C înțelegem utilizarea proprietăților 5C-10C ale relației de deductibilitate.

Notăm cu Γ mulțimea celor două premize ale silogismului

$$\forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)),\ \forall x\,(q(x) \Rightarrow r(x)).$$

Atunci:

(1)	$\Gamma \vdash p(x) \Rightarrow q(x)$	$\forall$ - elimin, C
(2)	$\Gamma \vdash q(x) \Rightarrow r(x)$	$\forall$ - elimin, C
(3)	$\Gamma, p(x) \vdash q(x)$	1, $\Rightarrow$ - elimin, C
(4)	$\Gamma, p(x) \vdash r(x)$	2, 3, $\Rightarrow$ - elimin, C
(5)	$\Gamma \vdash p(x) \Rightarrow r(x)$	4 C
	$\Gamma \vdash \forall x\,(p(x) \Rightarrow r(x))$	5 $\forall$ - introd.

Exerciții (Soluții la pag. 92)

6. Cu ajutorul predicatului

Axy : x este apreciat de y,

a operatorilor logici (propoziționali) şi a cuantificatorilor, transcrieți simbolic fiecare dintre următoarele propoziții:

a) Oricine este apreciat de cineva.
b) Oricine apreciază pe cineva.
c) Oricine este apreciat sau apreciază pe cineva.
d) Oricine este apreciat, apreciază pe cineva.

7. Pentru fiecare variabilă de predicat $q(x)$ se consideră formulele

A: $\forall x\, q(x)$, I: $\exists x\, q(x)$, E: $\forall x \rceil q(x)$, O: $\exists x \rceil q(x)$[1]

Justificați validitatea universală a următoarelor formule

a) $A \Rightarrow I$, $E \Rightarrow O$

(relații în virtutea cărora I este *subalterna* lui A, şi O *subalterna* lui E).

b) $\rceil A \Leftrightarrow O$, $\rceil E \Leftrightarrow I$

(relații în virtutea cărora A şi O, respectiv E şi I, se numesc *contradictorii*);

c) $\rceil (A \wedge E)$

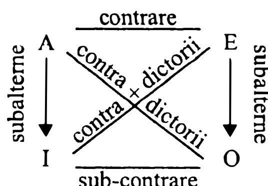
(relație în virtutea căreia A şi E se numesc *contrare*)

d) $I \vee O$

(relație în virturea căreia I şi O se numesc *subcontrare*)[2].

[1] Ele sunt echivalente, respectiv, cu cele patru tipuri de propoziții *A, E, I, O* din 3D în cazul când $p(x)$ ia valoarea A pentru orice x (ceea ce se întâmplă, de pildă, dacă substituim $p(x)$, cu formula $p \vee \rceil p$).

[2] Aceste patru tipuri de relații se numesc *inferențe imediate*. Ele pot fi sistematizate într-o diagramă numită „pătrat logic" (Boethius, 480-524).



8. Forma completă a celor patru tipuri de propoziții *A, I, E, O* este (conform 3D) următoarea:

$$A: \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)), \qquad I: \exists x\,(p(x) \wedge q(x)),$$
$$E: \forall x\,(p(x) \Rightarrow \neg q(x)), \qquad O: \exists x\,(p(x) \wedge \neg q(x)),$$

a) Justificați validitatea universală a echivalențelor

$$\neg A \Leftrightarrow O \quad \text{şi} \quad \neg E \Leftrightarrow I.$$

b) Arătați nevaliditatea formulelor

$$A \Rightarrow I, \quad E \Rightarrow O, \quad \neg(A \wedge E), \quad I \vee O$$

într-un univers alcătuit dintr-un singur element

$$U = \{1\}.$$

c) Validitatea universală a formulei

$$\exists x\, p(x) \Rightarrow (A \Rightarrow I)$$

poate fi probată cu ajutorul următorului şir de nouă relații deductive:

(1) $A \vdash p(y) \Rightarrow q(y)$

(2) $p(y), p(y) \Rightarrow q(y) \vdash p(y)$

(3) $p(y), p(y) \Rightarrow q(y) \vdash q(y)$

(4) $p(y), q(y) \vdash p(y) \wedge q(y)$

(5) $p(y) \wedge q(y) \vdash I$

(6) $A, p(y) \vdash I$

(7) $A, \exists x\, p(x) \vdash I$

(8) $\exists x\, p(x) \vdash A \Rightarrow I$

(9) $\vdash \exists x\, p(x) \Rightarrow (A \Rightarrow I)$.

Justificați-o pe fiecare dintre ele după modelul exemplelor din §34.

d) Construiţi un şir corespunzător de asemenea relaţii pentru a justifica validitatea universală a formulei

$$\exists x\, p(x) \Rightarrow (E \Rightarrow O).$$

e) Justificaţi validitatea universală a formulelor:

$$\exists x\, p(x) \Rightarrow \rceil(A \wedge E) \quad \text{şi} \quad \exists x\, p(x) \Rightarrow (I \vee O).$$

Anexa I: SOLUȚIILE EXERCIȚIILOR

1. a) Transcris în limbaj simbolic raționamentul devine

$$H \vee \rceil L \Rightarrow I, \quad H \wedge \rceil I, \quad \text{deci } L.$$

c) Validitatea propozițională a implicației

$$(q \vee \rceil r \Rightarrow p) \wedge (q \wedge \rceil p) \Rightarrow r$$

se poate proba cu ajutorul tabelei de adevăr

p	q	r	$(q \vee \rceil r \Rightarrow p) \wedge (q \wedge \rceil p) \Rightarrow r$
A	A	A	A A F F A
A	A	F	A A F F A
A	F	A	F A F F A
F	A	A	A F F A A
A	F	F	A A F F A
F	A	F	A F F A A
F	F	A	F A F F A
F	F	F	A F F F A

d) Coloana formulei $(q \vee \rceil r \Rightarrow p) \wedge (q \wedge \rceil p)$, alcătuită numai din F, arată că această formulă este inconsistentă (cf.7B). Conform TAB⇒ ea implică orice formulă. Prin urmare, raționamentul – având-o ca ipoteză – este propozițional valid, independent de concluzia sa.

2. a) Dicționar

I: impozitele cresc,

D: se înregistrează deficit bugetar,

S: sumele alocate asistenței sociale scad.

Raționamentul este alcătuit din propozițiile logice

$$\rceil I \Rightarrow D, \quad D \Rightarrow S, \quad I, \quad \text{deci } \rceil S.$$

c) Formula în cauză – înlocuind *I* cu *p*, *D* cu *q*, *S* cu *r* – va fi

$$(\rceil p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \Rightarrow \rceil r$$

şi are valoarea F când p şi r sunt A.

Concluzia raţionamentului nu rezultă aşadar din premisele sale; cel puţin nu în virtutea legilor logicii propoziţionale.

3. Raţionamentul este alcătuit din propoziţiile logice

$$S \Rightarrow P \vee C, \qquad P \Rightarrow V, \qquad C \Rightarrow D, \qquad \rceil V \wedge \rceil D,$$

deci $\rceil S$.

Formula propoziţională corespunzătoare va fi – înlocuind S cu p, P cu q, C cu r, V cu s, D cu t

$$(1) \quad (p \Rightarrow q \vee r) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge (r \Rightarrow t) \wedge \rceil s \wedge \rceil t \Rightarrow \rceil p$$

Întrucât tabela sa de adevăr are $2^5 = 32$ de linii (!) vom face verificarea validităţii prin căutarea sistematică a unui contra-exemplu (cf. 8B).

Pentru ca implicaţia (1) să fie falsă trebuie ca

$$(2) \quad p \Rightarrow q \vee r, \quad q \Rightarrow s, \quad r \Rightarrow t, \quad \rceil s, \rceil t \text{ să fie A,}$$

iar $\rceil p$ să fie F.

Deoarece p şi $p \Rightarrow q \vee r$ sunt A,

$$q \vee r \text{ este A.}$$

Dacă q este A, întrucât $q \Rightarrow s$ este A (cf. (2)), s este A, deci $\rceil s$ este F; ceea ce contrazice (2).

Dacă r este A, întrucât $r \Rightarrow t$ este A (cf. (2)), t este A, deci $\rceil t$ este F contrazicând (2).

Aşadar (1) nu poate fi falsă; ea este *validă*.

4. a) Transcrise în limbaj propoziţional – conform dicţionarului propus – cele trei declaraţii vor fi

X_1: $P_2 \wedge \rceil P_3$,

X_2: $P_1 \Rightarrow P_3$,

X_3: $\rceil P_3 \wedge (P_1 \vee P_2)$.

b) Formulele propoziționale corespunzătoare fiind

$\alpha_1: p_2 \wedge \neg p_3, \quad \alpha_2: p_1 \Rightarrow p_3, \quad \alpha_3: \neg p_3 \wedge (p_1 \vee p_2)$

consistența formulei $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ presupune găsirea unor valori de adevăr pentru p_1, p_2, p_3 astfel încât valoarea acestei conjuncții – deci și a fiecărei formule în parte – să fie A.

α_1 este A atunci când p_2 este A și p_3 este F. În acest caz , α_2 este A numai dacă p_1 este F (de ce?).

Pentru valorile găsite, α_3 este $\neg F \wedge (F \vee A)$ adică A. Ceea ce probează consistența.

c) Relația de deductibilitate $\alpha_1 \vdash \alpha_3$ se poate obține astfel

(1)	$p_2 \wedge \neg p_3 \vdash p_2$	$\wedge$ -elim.
(2)	$p_2 \wedge \neg p_3 \vdash \neg p_3$	
(3)	$p_2 \vdash p_1 \vee p_2$	$\vee$ -introd.
(4)	$\neg p_3, p_1 \vee p_2 \vdash \neg p_3 \wedge (p_1 \vee p_2)$	$\wedge$ -introd.
	$p_2 \wedge \neg p_3 \vdash \neg p_3 \wedge (p_1 \vee p_2)$	1, 2, 3, 4 C

Deci $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_3$ este validă (de ce?).

Verificați, căutând contraexemple, că celelalte cinci formule $\alpha_i \Rightarrow \alpha_j$ sunt nevalide.

Observație. Pentru obținerea acestor rezultate cititorul poate utiliza și tabele de adevăr.

d) Dacă p_1, p_2, p_3 sunt F, atunci α_1 și α_3 sunt F, iar α_2 este A.

e) Presupunerea făcută revine, în cazul lui X_1, la implicațiile

$$\neg p_1 \Rightarrow \alpha_1 \quad \text{și} \quad p_1 \Rightarrow \neg \alpha_1 .$$

În baza transpoziției și a eliminării dublei negații (DN), din prima implicație deducem conversa celei de a doua

$$\neg \alpha_1 \Rightarrow p_1$$

Deci, conform $\Leftrightarrow$ -introd., rezultă echivalența:

$$p_1 \Leftrightarrow \neg\alpha_1.$$

Similar, în celelalte două cazuri:

$$p_2 \Leftrightarrow \neg\alpha_2,$$

$$p_3 \Leftrightarrow \neg\alpha_3.$$

Construind tabela de adevăr:

p_1	p_2	p_3	$\neg\alpha_1$	$\neg\alpha_2$	$\neg\alpha_3$
A	A	A	A	F	A
A	A	F	F	A	F
A	F	A	A	F	A
F	A	A	A	F	A
A	F	F	A	A	F
F	A	F	F	F	F
F	F	A	A	F	A
F	F	F	A	F	A

constatăm că singura linie în care valorile primelor trei coloane coincid – respectiv – cu valorile ultimelor trei, este a treia (în chenar punctat).

Vinovați vor fi, în acest caz, doar X_1 și X_3.

5e).

(1) p	ipoteză	
(2) $\neg p$	ipoteză	
(3) $p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow p)$	*ax*1a *S*	
(4) $\neg p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	*ax*1a *S*	
(5) $(\neg q \Rightarrow p) \Rightarrow ((\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg\neg q)$	*ax*6 *S*	
(6) $\neg q \Rightarrow p$	1,3	*D*
(7) $\neg q \Rightarrow \neg p$	2,4	*D*
(8) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg\neg q$	5, 6	*D*
(9) $\neg\neg q$	7, 8	*D*

(10) $\rceil\rceil q \Rightarrow q$ — *ax* 7

(11) q — 9,10 *D*

6. a) $\forall x \, \exists y \, Axy$

b) $\forall y \, \exists x \, Axy$

c) $\forall x \, (\exists y \, Axy \vee \exists y \, Ayx)$, ceea ce – în baza echivalenței E_{47} – se mai poate scrie sub forma (prenexă);

$\forall x \, \exists y \, (Axy \vee Ayx)$

d) $\forall x \, (\exists y \, Axy \Rightarrow \exists y \, Ayx)$.

7. a) $A \Rightarrow I$ este teoremă a calculului predicatelor (cf. 2F); în virtutea proprietății 6F ea este universal validă.

$E \Rightarrow O$ se obține din formula precedentă substituind $q(x)$ prin $\rceil q(x)$; conform 17E, din validitatea celei dintâi rezultă și a celei de a doua.

b) Aceste echivalențe sunt cazuri particulare ale echivalențelor E_{32} și E_{35}.

c) Conform b: $\rceil E \sim I$.

În virtutea proprietății de înlocuire a expresiilor echivalente (21E) rezultă

$$(A \Rightarrow I) \sim (A \Rightarrow \rceil E)$$

În baza echivalenței E_{13}

$$(A \Rightarrow \rceil E) \sim (\rceil A \vee \rceil E)$$

și, conform E_8

$$(\rceil A \vee \rceil E) \sim \rceil (A \wedge E).$$

Așadar

$$(A \Rightarrow I) \sim \rceil (A \wedge E)$$

ceea ce, conf. 19E, face ca din validitatea (universală) a primei formule să rezulte și validitatea celei de a doua.

d) $(A \Rightarrow I) \underset{E_{13}}{\sim} (\rceil A \vee I)$.

Aplicând proprietatea de înlocuire a expresiilor echivalente și $\rceil A \sim O$ rezultă

$$\rceil A \vee I \sim O \vee I.$$

În final, utilizând comutativitatea $\vee$ (E_7), găsim:

$$(A \Rightarrow I) \sim (I \vee O).$$

8. a) Conform E_{32}:

$$(1) \rceil \forall x\, (p(x) \Rightarrow q(x)) \sim \exists x \rceil (p(x) \Rightarrow q(x)).$$

Pe de altă parte, conform E_{14}:

$$\rceil (p(x) \Rightarrow q(x)) \sim p(x) \wedge \rceil q(x).$$

Aplicând proprietatea de înlocuire a expresiilor echivalente (21E) rezultă:

$$(2) \exists x \rceil (p(x) \Rightarrow q(x)) \sim \exists x\, (p(x) \wedge \rceil q(x))$$

Din (1) și (2), prin tranzitivitatea relației $\sim$ (cf. pg. 19) rezultă:

$$\rceil A \sim O.$$

Similar se verifică relația $\rceil E \Leftrightarrow I$.

b) Se alege $p(1)$ fals.

c) (1) $\forall$-elim; (2) 5C; (3) $\Rightarrow$ -elim.; (4) $\wedge$-introd.; (5) $\exists$-introd.; (6) 1, 2, 3, 4, 5 C; (7) 6, *ax* $\exists$; (8) 7, 10 C; (9) 8, 9 C.

d) Se înlocuiește $q(x)$ prin $\rceil q(x)$ în relațiile de la punctul c.

e) Au loc echivalențele

$$\rceil (A \wedge E) \underset{E_8}{\sim} (\rceil A \vee \rceil E) \underset{E_{13}}{\sim} (A \Rightarrow \rceil E) \text{ și, conform a) } \rceil E \sim I,$$

de unde deducem: $\rceil (A \wedge E) \sim (A \Rightarrow I)$.

Deci validitatea universală a formulei $\exists x\, p(x) \Rightarrow \rceil (A \wedge E)$ rezultă din validitatea universală a formulei $\exists x\, p(x) \Rightarrow (A \Rightarrow I)$, conform proprietății de înlocuire a expresiilor echivalente (21E).

Deoarece $\rceil A \sim O$ (punctul a), rezultă:

$$(I \vee O) \sim (I \vee \rceil A) \underset{E_7}{\sim} (\rceil A \vee I) \underset{E_{13}}{\sim} (A \Rightarrow I).$$

De unde rezultă, ca mai sus, validitatea universală a formulei:

$$\exists x\, p(x) \Rightarrow I \vee O.$$

Anexa II. ECHIVALENȚE LOGICE

α, β, γ reprezintă formule propoziționale sau cu predicate.

E_1.	$\alpha \sim \rceil\rceil\alpha$	legea negării negației (DN)
E_2.	$\alpha \sim \alpha \wedge \alpha$	legile simplificării
E_3.	$\alpha \sim \alpha \vee \alpha$	
E_4.	$\alpha \sim (\rceil\alpha \Rightarrow \alpha)$	*consequentia mirabilis*
E_5.	$\rceil\alpha \sim (\alpha \Rightarrow \beta \wedge \rceil\beta)$	*reductio ad absurdum*
E_6.	$\alpha \wedge \beta \sim \beta \wedge \alpha$	legile comutativității
E_7.	$\alpha \vee \beta \sim \beta \vee \alpha$	
E_8.	$\rceil(\alpha \wedge \beta) \sim \rceil\alpha \vee \rceil\beta$	legile De Morgan
E_9.	$\rceil(\alpha \vee \beta) \sim \rceil\alpha \wedge \rceil\beta$	
E_{10}.	$\alpha \vee \beta \sim \rceil(\rceil\alpha \wedge \rceil\beta)$	definiția $\vee$ prin $\rceil$, $\wedge$
E_{11}.	$\alpha \wedge \beta \sim \rceil(\rceil\alpha \vee \rceil\beta)$	definiția $\wedge$ prin $\rceil$, $\vee$
E_{12}.	$\alpha \Rightarrow \beta \sim \rceil\beta \Rightarrow \rceil\alpha$	traspoziția
E_{13}.	$\alpha \Rightarrow \beta \sim \rceil\alpha \vee \beta$	definiția $\Rightarrow$ prin $\rceil$, $\vee$
E_{14}.	$\alpha \Rightarrow \beta \sim \rceil(\alpha \wedge \rceil\beta)$	definiția $\Rightarrow$ prin $\rceil$, $\wedge$
E_{15}.	$\rceil(\alpha \Rightarrow \beta) \sim \alpha \wedge \rceil\beta$	negarea implicației
E_{16}	$\alpha \Leftrightarrow \beta \sim \beta \Leftrightarrow \alpha$	simetria echivalenței
E_{17}.	$\alpha \Leftrightarrow \beta \sim (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$	definiția $\Leftrightarrow$ prin $\wedge$, $\Rightarrow$
E_{18}.	$\alpha \Leftrightarrow \beta \sim (\alpha \wedge \beta) \vee (\rceil\alpha \wedge \rceil\beta)$	definiția $\Leftrightarrow$ prin $\rceil$, $\wedge$, $\vee$
E_{19}.	$\alpha \Leftrightarrow \beta \sim \rceil\alpha \Leftrightarrow \rceil\beta$	legea complementarității
E_{20}.	$\rceil(\alpha \Leftrightarrow \beta) \sim \rceil\alpha \Leftrightarrow \beta$	negarea echivalenței
E_{21}.	$\rceil(\alpha \Leftrightarrow \beta) \sim \alpha \Leftrightarrow \rceil\beta$	negarea echivalenței

E_{22}. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \sim (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ legile asociativității

E_{23}. $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \sim (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$

E_{24}. $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma) \sim (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$ exportare

E_{25}. $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \sim (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ legile distributivității

E_{26}. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \sim (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

E_{27}. $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha \sim \alpha \wedge \beta$ absorbția

În echivalențele E_{28} și E_{29} formula α nu conține variabila liberă x

E_{28}. $\forall x\, \alpha \sim \alpha$

E_{29}. $\exists x\, \alpha \sim \alpha$

În echivalențele E_{30} și E_{31} variabila y este substituibilă variabilei x în $\alpha(x)$ [cf. 14E]

E_{30}. $\forall x\, \alpha(x) \sim \forall y\, \alpha(y)$

E_{31}. $\exists x\, \alpha(x) \sim \exists y\, \alpha(y)$

E_{32}. $\rceil \forall x\, \alpha(x) \sim \exists x \rceil \alpha(x)$ negarea cuantificatorului $\forall$

E_{33}. $\rceil \exists x\, \alpha(x) \sim \forall x \rceil \alpha(x)$ negarea cuantificatorului $\exists$

E_{34}. $\forall x\, \alpha(x) \sim \rceil \exists x \rceil \alpha(x)$ definiția $\forall$ prin $\exists$

E_{35}. $\exists x\, \alpha(x) \sim \rceil \forall x \rceil \alpha(x)$ definiția $\exists$ prin $\forall$

În echivalențele E_{36}-E_{45} formula α nu conține variabila liberă x.

E_{36}. $\alpha \wedge \forall x\, \beta(x) \sim \forall x\, (\alpha \wedge \beta(x))$

E_{37}. $\alpha \wedge \exists x\, \beta(x) \sim \exists x\, (\alpha \wedge \beta(x))$

E_{38}. $\alpha \vee \forall x\, \beta(x) \sim \forall x\, (\alpha \vee \beta(x))$

E_{39}. $\alpha \vee \exists x\, \beta(x) \sim \exists x\, (\alpha \vee \beta(x))$

E_{40}. $\alpha \Rightarrow \forall x\, \beta(x) \sim \forall x\, (\alpha \Rightarrow \beta(x))$

E_{41}. $\alpha \Rightarrow \exists x\, \beta(x) \sim \exists x\, (\alpha \Rightarrow \beta(x))$

E_{42}. $\forall x\, \beta(x) \Rightarrow \alpha \sim \exists x\, (\beta(x) \Rightarrow \alpha)$

E_{43}. $\exists x\, \beta(x) \Rightarrow \alpha \sim \forall x\, (\beta(x) \Rightarrow \alpha)$

E_{44}. $\alpha \Leftrightarrow \forall x\, \beta(x) \sim \forall x\, (\alpha \Leftrightarrow \beta(x))$

E_{45}. $\alpha \Leftrightarrow \exists x\, \beta(x) \sim \exists x\, (\alpha \Leftrightarrow \beta(x))$

E_{46}. $\forall x\, \alpha(x) \wedge \forall x\, \beta(x) \sim \forall x\, (\alpha(x) \wedge \beta(x))$

E_{47}. $\exists x\, \alpha(x) \vee \exists x\, \beta(x) \sim \exists x\, (\alpha(x) \vee \beta(x))$

E_{48}. $\forall x\, \alpha(x) \Rightarrow \exists x\, \beta(x) \sim \exists x\, (\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)$

E_{49}. $\forall x\, \forall y\, \alpha(x, y) \sim \forall y\, \forall x\, \alpha(x, y)$

E_{50}. $\exists x\, \exists y\, \alpha(x, y) \sim \exists y\, \exists x\, \alpha(x, y)$

Anexa III: LOGICĂ ŞI METAMATEMATICĂ

Orice ştiinţă sau sistem organizat de gândire îşi probează adevărurile prin recurs la regulile - general admise - ale deducţiei logice.

Matematica a fost prima care a utilizat în mod sistematic acest instrument („organon") în demonstrarea teoremelor ei. Şi nu întâmplător majoritatea exemplelor de demonstraţie utilizate de Aristotel în scrierile lui de logică sunt exemple matematice.

A trebuit să treacă peste 2000 de ani ca rolurile să se inverseze şi matematica, mai precis algebra, să devină din câmp de aplicaţie al logicii - instrument de investigaţie a sa. Cercetările făcute în acest sens de tânărul matematician englez G. Boole au condus la apariţia unui calcul logic (cu propoziţii) similar, în multe privinţe, celui algebric cu numere.

Următorul pas major este făcut de logicianul german G. Frege (1848-1925) care dezvoltă primul sistem cuprinzător de logică simbolică. Deşi notaţiile complicate pe care le utiliza i-au întârziat răspândirea, opera sa a influenţat hotărâtor apariţia primului volum (în 1910) din monumentala lucrare *Principia Mathematica* a lui A.N. Whitehead şi B. Russell[1].

Trebuie precizat că atât Frege, cât şi autorii Principiilor au urmărit „reducerea" unor părţi din matematică - în special aritmetica - la logică. Cu alte cuvinte, au urmărit să arate că principiile acestor discipline matematice îşi au originea în principii de logică. Încercarea s-a dovedit lipsită de succes, dar nu şi de consecinţe, căci a permis construirea primelor sisteme axiomatice formale. Astfel, discipline matematice importante, ca aritmetica şi teoria mulţimilor, au căpătat fundamente axiomatice în cadrul unor sisteme formale de logică (calcul cu predicate).

---

[1] Primul dintre cei doi a fost matematician, iar al doilea logician şi filozof.

Necesitatea de a fundamenta astfel matematica a izvorât şi din dorinţa de a pune ordine în bazele unor părţi ale sale ca reacţie la apariţia - în cadrul acestor părţi - a unor concepte cu caracter paradoxal (contradictoriu).

Un exemplu de asemenea concept din teoria mulţimilor i-a fost semnalat lui Frege de către Russell.

Reunind într-o aceeaşi colecţie obiectele având o proprietate comună, ajungem la următoarele constatări.

În unele cazuri însăşi colecţia acestor obiecte este un obiect având proprietatea comună elementelor sale. Astfel, de pildă, colecţia noţiunilor abstracte este ea însăşi o noţiune abstractă.

În limbajul teoriei mulţimilor colecţia A, a noţiunilor abstracte, este un element al lui A, fapt notat prin $A \in A$.

Dimpotrivă, colecţia C - a noţiunilor concrete - nu este o noţiune concretă, ceea ce în limbajul menţionat înseamnă $\rceil(C \in C)$, fapt notat de obicei prin $C \notin C$.

Reunim într-o colecţie - notată R - toate obiectele X având proprietatea $X \notin X$. În virtutea principiului terţului exclus

$$R \in R \quad \text{sau} \quad R \notin R$$

În primul dintre cele două cazuri, R fiind element al colecţiei definită prin proprietatea $X \notin X$, rezultă $R \notin R$.

În al doilea caz, având chiar această proprietate, R *trebuie* să fie element al colecţiei definită prin ea, adică al colecţiei R; deci $R \in R$.

Plecând aşadar de la oricare dintre cele două afimaţii deducem - *pe cale logică* - negaţia sa!

Era firesc ca o astfel de provocare[1] să nască aprinse controverse printre logicieni şi matematicieni.

O parte dintre aceştia (B. Russell, E. Zermelo şi alţii) considerând că principiile cantoriene[2] ale teoriei mulţimilor trebuie

---

[1] Au fost descoperite mai multe asemenea enunţuri contradictorii. Cititorul poate găsi informaţii suplimentare în lucrarea lui A. Dumitriu: *Istoria Logicii*, Bucureşti, 1975, cap. XLIII.

[2] Matematicianul german G. Cantor (1845-1918) este creatorul teoriei moderne a mulţimilor.

amendate, au creat sisteme axiomatice limitative în care, sperau ei, astfel de contradicţii nu vor mai apare.

L.E.J. Brouwer matematician olandez şi creator al şcolii de gândire numită „intuiţionism" face o critică severă modului în care matematicienii utilizează în raţionamentele lor noţiunea de mulţime infinită şi - în legătură cu ea - o serie de principii logice (terţul exclus, dubla negaţie etc.).

Critica intuiţionistă avea drept consecinţă indirectă abandonarea unor rezultate şi metode de lucru ce intraseră deja în patrimoniul matematicii începutului de secol. Considerată de mulţi drept prea radicală, ea nu s-a bucurat de o adeziune largă (deşi a fost susţinută de unii matematicieni importanţi).

Cel care a luat imediat poziţie în favoarea matematicii clasice a fost un reprezentant strălucit al acesteia - D. Hilbert. După ce, în 1899 reuşise construirea primei axiomatizări satisfăcătoare a geometriei euclidiene, în 1904 el propune - pentru a salva „paradisul pe care ni l-a făurit Cantor" - crearea unui sistem formal axiomatic care să cuprindă matematica clasică. Hilbert spera că făcând din acest sistem un obiect de studiu - al aşa-numitei teorii a demonstraţiei sau „metamatematicii" - să se poată demonstra cu mijloacele finitiste ale aritmeticii, admise şi de intuiţionişti, necontradicţia sistemului însuşi.

„Programul formalist" de fundamentare a matematicii, cum s-a numit proiectul hilbertian, demarat după 1920, a înregistrat câteva succese[1]. Dar o limitare de principiu, descoperită în 1931 de K. Gödel, a arătat că demonstraţii -în sensul finitist propus de Hilbert - pentru consistenţa unor părţi importante ale matematicii - în prealabil axiomatizate şi formalizate - nu sunt posibile. Cercetările s-au orientat atunci către demonstrarea consistenţei unor fragmente de matematică luând ca ipoteză consistenţa altora. Rezultate remarcabile obţinute în această direcţie au făcut ca, între timp, metamatematica să devină o disciplină cu statut bine definit în ansamblul celorlalte ramuri ale matematicii.

---

[1] Cel mai promiţător a fost demonstraţia - cu mijloace nefinitiste - a necontradicţiei sistemului formal axiomatic al aritmeticii, dată de G. Gentzen în 1936.

BIBLIOGRAFIE

1. **Ambrose A., Lazerowitz M.**: *Fundamentals of symbolic logic*, New York, 1948
2. **Clark R., Welsh P.**: *Introduction to logic*, Princeton, 1962
3. **Johnson D.L.**: *Elements of logic via numbers and sets*, New York, 1998
4. **Kleene S.C.**: *Mathematical logic*, New York, 1967
5. **Lewis Caroll**: *Mathematical recreations*, New York, 1958
6. **Lewis C.I., Langford C.H.**: *Symbolic logic*, New York, 1951
7. **Purtill R.**: *Logic for philosophers*, New York, 1971
8. **Quine W.V.O**: *Mathematical logic*, New York, 1940
9. **Stob M.**: *Undergraduate logic*, Michigan, 1996
10. **Strawson P.F.**: *Introduction to logical theory*, London, 1952
11. **Suppes P.**: *Introduction to logic*, Princeton, 1957

SIMBOLURI UTILIZATE

INDEX